www.czasopisma.pan.pl PAN www.journals.pan.pl

Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 22: 2013, Nr 4 (88), ISSN 1230–1493
DOI: 10.2478/pfns-2013-0096

Marek Nowak

Zakres i treść nazwy według Kazimierza Ajdukiewicza (zastosowanie związków Galois)

Słowa kluczowe: *związek Galois, zakres nazwy, treść nazwy, treść charakterystyczna, treść pełna, treść konstytutywna, cecha konsekutywna*

Szeroko znane, czy wręcz popularne, pojęcia Ajdukiewicza *zakresu* i *treści* nazwy zostały w taki sposób wprowadzone w jego *Logice pragmatycznej* (Ajdukiewicz 1975), iż, jak to się okaże, jest rzeczą zupełnie naturalną scharakteryzować je przy użyciu antymonotonicznego związku Galois, zdefiniowanego w sposób standardowy dla innych celów przez Gantera i Willego (1999) w oparciu o binarną relację zachodzącą między obiektami a własnościami: obiekt *o* jest w tej relacji z własnością *w* wtedy i tylko wtedy, gdy *w* jest cechą *o*.

Najpierw poświęcimy uwagę związkom Galois w ogólności, następnie ich standardowej postaci w szczególności. Z kolei przypominamy pojęcia zakresu i treści nazwy według Ajdukiewicza. Wreszcie prezentujemy ich charakterystykę przy użyciu związku Galois.

Preliminaria matematyczne

Zbiór częściowo uporządkowany to para $(A,\leq_A)$ złożona ze zbioru A oraz binarnej relacji $\leq_A$ określonej na A, zwrotnej, antysymetrycznej i przechodniej (zwanej *częściowo porządkującą*). Gdy A' jest podzbiorem zbioru A (tzn. $A'\subseteq A$), symbolem $(A',\leq_A)$ oznacza się zbiór częściowo uporządkowany, w którym relacja częściowo porządkująca ma postać: $\leq_A \cap (A' \times A')$. *Element największ-*

szy w zbiorze częściowo uporządkowanym $(A,\leq_A)$, to taki element $a \in A$, że dla każdego $x \in A$, $x \leq_A a$. Jeżeli istnieje, to dokładnie jeden. Z kolei element $a \in A$ jest *elementem minimalnym* w $(A,\leq_A)$, gdy nie istnieje $x \in A$ taki, że $x \leq_A a$ oraz $x \neq a$.

Dowolna funkcja C: $A \rightarrow A$ taka, że dla wszystkich $x, y \in A$, $x \leq_A C(x)$, $C(C(x)) \leq_A C(x)$, $x \leq_A y \Rightarrow C(x) \leq_A C(y)$, nazywana jest operacją domknięcia na zbiorze częściowo uporządkowanym $(A,\leq_A)$. Dowolny punkt stały operacji domknięcia C, a więc taki element $a \in A$, że $a = C(a)$, nazywamy *elementem domkniętym względem C*.

Mówimy, że zbiory częściowo uporządkowane $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$ są *dualnie izomorficzne*, gdy istnieje funkcja $f : A \rightarrow B$, będąca bijekcją (tzn. dla dowolnego $b \in B$ istnieje $a \in A$ taki, że $b = f(a)$ oraz równość $f(a_1) = f(a_2)$ implikuje $a_1 = a_2$, dla dowolnych $a_1, a_2 \in A$) oraz spełniająca warunek: $a_1 \leq_A a_2$ wtw $f(a_2) \leq_B f(a_1)$. Taką funkcję f nazywamy dualnym izomorfizmem tych zbiorów częściowo uporządkowanych.

Dla dowolnych zbiorów częściowo uporządkowanych $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$ para funkcji f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow A$ spełniających dla dowolnych $a \in A$, $b \in B$ warunek:

(Gc) $b \leq_B f(a)$ wtw $a \leq_A g(b)$,

jest nazywana *związkiem Galois*. W miejsce warunku (Gc) można równoważnie podać następujące:

$a \leq_A g(f(a))$,

$b \leq_B f(g(b))$,

$a_1 \leq_A a_2 \Rightarrow f(a_2) \leq_B f(a_1)$, $a_1, a_2 \in A$,

$b_1 \leq_B b_2 \Rightarrow g(b_2) \leq_A g(b_1)$, $b_1, b_2 \in B$.

Teorię (antymonotonicznych) związków Galois można znaleźć np. w pracach: Denecke, Erné, Wismath 2004; Domenach, Leclerc 2001; lub Ganter, Wille 1999.

Ważność i szerokość zastosowań związków Galois na terenie matematyki wynika z następujących konstatacji:

(1) dla danego związku Galois (f, g), funkcje C_1: $A \rightarrow A$, C_2: $B \rightarrow B$ określone następująco: $C_1(a) = g(f(a))$, $C_2(b) = f(g(b))$, są operacjami domknięcia odpowiednio na zbiorach częściowo uporządkowanych $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$,

(2) zbiór elementów domkniętych względem operacji C_1 jest tożsamy z przeciwdziedziną funkcji g oraz zbiór elementów domkniętych względem operacji C_2 jest tożsamy z przeciwdziedziną funkcji f: $\{a \in A: a = C_1(a)\} = g[B]$ $(= \{g(b): b \in B\})$ oraz $\{b \in B: b = C_2(b)\} = f[A]$,

(3) funkcja f obcięta do przeciwdziedziny $g[B]$ funkcji g (czyli do zbioru wszystkich elementów domkniętych względem C_1) jest dualnym izomorfizmem zbiorów częściowo uporządkowanych wszystkich elementów domkniętych względem operacji C_1 oraz wszystkich elementów domkniętych względem C_2: $(g[B], \leq_A)$, $(f[A], \leq_B)$; zatem f: $g[B] \to f[A]$, jest bijekcją oraz dla dowolnych C_1-domkniętych elementów a_1, a_2 zachodzi: $a_1 \leq_A a_2$ wtw $f(a_2) \leq_B f(a_1)$; funkcja g obcięta do zbioru wszystkich elementów C_2-domkniętych jest izomorfizmem odwrotnym,

(4) dla dowolnego elementu a domkniętego względem C_1, $f(a)$ jest elementem największym w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\{b \in B: a = g(b)\}, \leq_B)$ oraz $\{b \in B: a = g(b)\} = \{b \in B: f(a) = C_2(b)\}$ (dla dowolnego a domkniętego względem C_1, zbiór $\{b \in B: a = g(b)\}$ jest klasą abstrakcji $[f(a)]_{\equiv B}$ względem relacji równoważności $\equiv_B$ określonej na B następująco: $b_1 \equiv_B b_2$ wtw $g(b_1) = g(b_2)$ wtw $C_2(b_1) = C_2(b_2)$); podobnie, dla dowolnego elementu b domkniętego względem C_2, $g(b)$ jest elementem największym w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\{a \in A: b = f(a)\}, \leq_A)$ oraz $\{a \in A: b = f(a)\} = \{a \in A: g(b) = C_1(a)\}$ (dla dowolnego b domkniętego względem C_2, zbiór $\{a \in A: b = f(a)\}$ jest klasą abstrakcji $[g(b)]_{\equiv A}$ względem relacji równoważności $\equiv_A$ określonej na A następująco: $a_1 \equiv_A a_2$ wtw $f(a_1) = f(a_2)$ wtw $C_1(a_1) = C_1(a_2)$).

Na ogół, dla zastosowań, rozważa się standardowe związki Galois, a więc specjalnego typu, definiowane dla zbiorów częściowo uporządkowanych postaci: $(P(\mathsf{O}),\subseteq)$, $(P(\mathsf{W}),\subseteq)$, gdzie O, W są dowolnymi niepustymi zbiorami, P jest operacją tworzenia zbioru potęgowego (dla dowolnego zbioru X, $P(\mathsf{X})$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X) oraz $\subseteq$ jest relacją inkluzji. Oto dowolna binarna relacja ρ określona na zbiorach O, W (tzn. $\rho \subseteq \mathsf{O} \times \mathsf{W}$) wyznacza standardowy związek Galois f: $P(\mathsf{O}) \to P(\mathsf{W})$, g: $P(\mathsf{W}) \to P(\mathsf{O})$, następująco:

dla dowolnych $O \subseteq \mathsf{O}$, $w \in \mathsf{W}$ ($w \in f(O)$ wtw dla każdego $o \in O$, $o\ \rho\ w$),

dla dowolnych $W \subseteq \mathsf{W}$, $o \in \mathsf{O}$ ($o \in g(W)$ wtw dla każdego $w \in W$, $o\ \rho\ w$).

Mamy wtedy:

(Gc') $W \subseteq f(O)$ wtw $O \subseteq g(W)$, równoważnie:

$O \subseteq g(f(O))$,

$W \subseteq f(g(W))$,

$O_1 \subseteq O_2 \Rightarrow f(O_2) \subseteq f(O_1)$, O_1, $O_2 \subseteq \mathsf{O}$ (antymonotoniczność funkcji f),

$W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow g(W_2) \subseteq g(W_1)$, W_1, $W_2 \subseteq \mathsf{W}$ (antymonotoniczność funkcji g).

Łatwo przepisać własności (1)–(4) związków Galois dla obecnie rozważanego:

(1') dla związku Galois (f, g) wyznaczonego przez relację ρ, funkcje C_1: $P(\mathsf{O}) \to P(\mathsf{O})$, C_2: $P(\mathsf{W}) \to P(\mathsf{W})$, określone następująco: $C_1(O) = g(f(O))$, $C_2(W) = f(g(W))$, są operacjami domknięcia odpowiednio na zbiorach częściowo uporządkowanych $(P(\mathsf{O}),\subseteq)$, $(P(\mathsf{W}),\subseteq)$,

(2') zbiór elementów domkniętych względem operacji C_1 jest tożsamy z przeciwdziedziną funkcji g oraz zbiór elementów domkniętych względem operacji C_2 jest tożsamy z przeciwdziedziną funkcji f: $\{O \subseteq \mathsf{O}: O = C_1(O)\} = g[P(\mathsf{W})]$ (= $\{g(W): W \subseteq \mathsf{W}\}$) oraz $\{W \subseteq \mathsf{W}: W = C_2(W)\} = f[P(\mathsf{O})]$,

(3') funkcja f obcięta do przeciwdziedziny $g[P(\mathsf{W})]$ funkcji g (czyli do zbioru wszystkich elementów domkniętych względem C_1) jest dualnym izomorfizmem zbiorów częściowo uporządkowanych wszystkich elementów domkniętych względem operacji C_1 oraz wszystkich elementów domkniętych względem C_2: $(g[P(\mathsf{W})], \subseteq)$, $(f[P(\mathsf{O})], \subseteq)$, zatem f: $g[P(\mathsf{W})] \to f[P(\mathsf{O})]$, jest bijekcją oraz dla dowolnych C_1-domkniętych elementów O_1, O_2 zachodzi: $O_1 \subseteq O_2$ wtw $f(O_2) \subseteq f(O_1)$; funkcja g obcięta do zbioru wszystkich elementów C_2-domkniętych jest izomorfizmem odwrotnym,

(4') dla dowolnego elementu O domkniętego względem C_1, $f(O)$ jest elementem największym w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\{W \subseteq \mathsf{W}: O = g(W)\}, \subseteq)$ oraz $\{W \subseteq \mathsf{W}: O = g(W)\} = \{W \subseteq \mathsf{W}: f(O) = C_2(W)\}$ (dla dowolnego O domkniętego względem C_1, zbiór $\{W \subseteq \mathsf{W}: O = g(W)\}$ jest klasą abstrakcji $[f(O)]_{\equiv \mathsf{W}}$ względem relacji równoważności $\equiv_{\mathsf{W}}$ określonej na $P(\mathsf{W})$ następująco: $W_1 \equiv_{\mathsf{W}} W_2$ wtw $g(W_1) = g(W_2)$ wtw $C_2(W_1) = C_2(W_2)$); podobnie, dla dowolnego elementu W domkniętego względem C_2, $g(W)$ jest elementem największym w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\{O \subseteq \mathsf{O}: W = f(O)\}, \subseteq)$ oraz $\{O \subseteq \mathsf{O}: W = f(O)\} = \{O \subseteq \mathsf{O}: g(W) = C_1(O)\}$ (dla dowolnego W domkniętego względem C_2, zbiór $\{O \subseteq \mathsf{O}: W =$

www.czasopisma.pan.pl PAN POLSKA AKADEMIA NAUK www.journals.pan.pl

$f(O)\}$ jest klasą abstrakcji $[g(W)]_{\equiv\mathsf{O}}$ względem relacji równoważności $\equiv_{\mathsf{O}}$ określonej na $P(\mathsf{O})$ następująco: $O_1 \equiv_{\mathsf{O}} O_2$ wtw $f(O_1) = f(O_2)$ wtw $C_1(O_1) = C_1(O_2)$).

Ponadto, spełnione są następujące warunki, których w ogólności, dla dowolnych związków Galois, nie można sformułować:

(5) dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{O} \subseteq P(\mathsf{O})$, $f(\cup\mathcal{O}) = \cap\{f(O): O \in \mathcal{O}\}$ oraz dla dowolnej rodziny $\mathcal{W} \subseteq P(\mathsf{W})$, $g(\cup\mathcal{W}) = \cap\{g(W): W \in \mathcal{W}\}$; odpowiednio równoważnie: dla każdego $O \subseteq \mathsf{O}$, $f(O) = \cap\{f(o): o \in O\}$ oraz dla każdego $W \subseteq \mathsf{W}$, $g(W) = \cap\{g(w): w \in W\}$ (piszemy $f(o)$, $g(w)$ zamiast $f(\{o\})$, $g(\{w\})$),

(6) dla dowolnych $O \subseteq \mathsf{O}$, $o \in \mathsf{O}$: $o \in C_1(O)$ wtw $f(O) \subseteq f(o)$, oraz dla dowolnych $W \subseteq \mathsf{W}$, $w \in \mathsf{W}$: $w \in C_2(W)$ wtw $g(W) \subseteq g(w)$.

Na przykład, niech O będzie klasą wszystkich struktur algebraiczno-relacyjnych dla ustalonego języka kwantyfikatorowego pierwszego rzędu, zaś W – zbiorem wszystkich zdań tego języka. Struktura o jest w relacji ρ ze zdaniem w (tzn. $o\ \rho\ w$), gdy w jest prawdziwe w o (struktura o jest modelem dla zdania w). Wówczas dla dowolnej klasy O struktur, $f(O)$ jest zbiorem wszystkich zdań prawdziwych w każdej strukturze z O. Dla dowolnego zbioru zdań W, $g(W)$ jest klasą wszystkich modeli dla wszystkich zdań z W. Dowolny element domknięty względem operacji C_1, a więc element postaci $g(W)$, gdzie W jest zbiorem zdań, jest tzw. klasą elementarną struktur (zamkniętą na elementarną równoważność i ultraprodukty). Dowolny element domknięty względem C_2, a więc element postaci $f(O)$, gdzie O jest jakąś klasą struktur, jest teorią pierwszego rzędu. C_2 jest tu bowiem operacją wynikania logicznego: $w \in C_2(W)$ wtw dla dowolnej struktury o, jeżeli o jest modelem dla zbioru zdań W, to o jest modelem dla zdania w. Wreszcie, rodzina wszystkich klas elementarnych struktur algebraiczno-relacyjnych dla ustalonego języka, uporządkowana inkluzją, jest dualnie izomorficzna z rodziną (uporządkowaną inkluzją) wszystkich teorii pierwszego rzędu wyrażonych w tym języku. W szczególności, funkcja f – dualny izomorfizm, przyporządkowuje największej klasie elementarnej, a więc klasie wszystkich struktur, najmniejszą teorię, tzn. zbiór tautologii pierwszego rzędu (wyrażonych w ustalonym języku). Tymczasem najmniejszej elementarnej klasie struktur – klasie pustej, f przyporządkowuje największą teorię: zbiór wszystkich zdań tego języka.

Pojęcia zakresu i treści nazwy

Z logicznego punktu widzenia *zakres nazwy* jest dla Ajdukiewicza pojęciem bardziej podstawowym niż *treść*. Definiowany jest w oparciu o pierwotną relację *prawdziwego orzekania*:

> Cytat 1: „Zakres jakiejś nazwy – to [...] tyle, co zbiór [w sensie teoriomnogościowym] wszystkich jej desygnatów" (Ajdukiewicz 1975: 41). „Przedmioty oznaczone przez jakąś nazwę zowią się jej desygnatami". „Mówimy, że nazwa *oznacza*, przy pewnym swym znaczeniu, każdy i tylko taki przedmiot, o którym można ją zgodnie z prawdą orzec" (Ajdukiewicz 1975: 40).

Różne rodzaje treści nazwy: *pełna*, *charakterystyczna* oraz *konstytutywna* definiowane są w oparciu o zakres, mimo iż mają one ów zakres charakteryzować (tzn. znajomość treści charakterystycznej przez użytkownika nazwy ma mu określać zakres tej nazwy):

> Cytat 2: „...zbiór wszystkich cech przysługujących wspólnie wszystkim desygnatom danej nazwy przy pewnym jej znaczeniu nazywamy *pełną treścią* tej nazwy przy tym jej znaczeniu. Każda nazwa, która przy pewnym znaczeniu ma jakiś dokładnie określony zakres, posiada też przy tym znaczeniu dokładnie określoną treść pełną". „...*treść charakterystyczna nazwy N*, przy pewnym jej znaczeniu, jest to jakikolwiek zbiór cech *T* taki, że każdy desygnat nazwy *N* posiada każdą z cech zbioru *T* i tylko desygnaty nazwy *N* posiadają każdą z cech zbioru *T*. Treść pełna jest też treścią charakterystyczną, ale nie na odwrót; innymi słowy, treść charakterystyczna może, ale nie musi być treścią pełną" (Ajdukiewicz 1975: 50).

> Cytat 3: „Treść charakterystyczna danej nazwy jest wtedy jej treścią konstytutywną, gdy charakteryzuje zakres tej nazwy, przy czym, gdyby choć jedną cechę z niej usunąć, przestałaby ona ten zakres charakteryzować [tzn. przestałaby być treścią charakterystyczną tej nazwy]" (Ajdukiewicz 1975: 51).

Jak widać, treść konstytutywna danej nazwy jest elementem minimalnym w rodzinie wszystkich treści charakterystycznych tej nazwy, uporządkowanej inkluzją.

Zgodnie z kolejnym cytatem, istnieją treści charakterystyczne danej nazwy niebędące konstytutywnymi, a więc treści pleonastyczne. Dowolna treść pleonastyczna danej nazwy zawiera w sobie pewną treść konstytutywną tej nazwy:

> Cytat 4: „Treść charakterystyczna pewnej nazwy może [...] być *pleonastyczna*, tzn. może się w niej zawierać więcej cech niż potrzeba dla scharakteryzowania zakresu tej nazwy" (Ajdukiewicz 1975: 50). „Cechy zawarte w treści pleonastycznej, charakteryzującej pewien zbiór przedmiotów, cechy, których usunięcie prowadzi do treści konstytutywnej dla tego samego zbioru przedmiotów, nazywają się *cechami konsekutywnymi* ze względu na zbiór

pozostałych cech w tej treści zawartych, czyli cechami wynikającymi z tamtych" (Ajdukiewicz 1975: 51).

Najważniejszy typ treści nazwy to *konotacja* nazwy:

Cytat 5: „Treść charakterystyczna *T*, jaką nazwa *N* posiada przy znaczeniu *Z*, jest więc wtedy treścią językową, czyli konotacją tej nazwy (przy tym jej znaczeniu), gdy każdy (kto używa tej nazwy w tym właśnie znaczeniu) poinformowany o tym, że jakiś przedmiot ma wszystkie cechy w owej treści *T* zawarte, musi niezależnie od tego, co by wiedział poza tym, umieć trafnie rozstrzygnąć, czy nazwą tą może ten przedmiot zaopatrzyć" (Ajdukiewicz 1975: 52).

Dla Ajdukiewicza ważne są również związki między zakresem a treścią nazwy:

Cytat 6: „Wyjaśniliśmy wyżej, co to jest treść pewnej nazwy, przy czym wyróżniliśmy różne rodzaje treści nazw. Wyróżnienie to jest konieczne, jeśli się chce uniknąć zawikłań i bałamuctw, w jakie się często popada rozpatrując tzw. zagadnienie związku między treścią i zakresem. W zagadnieniu tym chodzi o to, czy wzbogacenie treści pociąga za sobą uszczuplenie zakresu, i na odwrót, oraz czy uszczuplenie treści pociąga za sobą rozszerzenie zakresu. Zagadnienie to rozwiązywano rozmaicie, a przyczyną różnicy poglądów w tej sprawie było mieszanie ze sobą tych różnych rodzajów treści, które zostały tu wyszczególnione" (Ajdukiewicz 1975: 52).

Jak widać, pierwotnymi pojęciami w powyższych definicjach są *przedmiot* (*obiekt*), *cecha* (*własność*) oraz *przysługiwanie cechy przedmiotowi*. Ajdukiewicz nie poświęca im uwagi. Sądzimy, że przyjmuje on milcząco pewne minimalne założenia charakteryzujące te pojęcia. Nie mając pewności, jakie są to założenia, sprecyzujemy obecnie kilka naturalnych minimalnych postulatów dookreślających te pojęcia, opartych na banalnym empirycznym oglądzie świata fizykalnego.

Założenie 1. Mówiąc „obiekt" (lub „przedmiot") mamy na myśli konkretną rzecz fizykalną, ten ołówek, tego człowieka itd. (jest to, jak się nam wydaje, ograniczenie prawdopodobnie nieakceptowalne przez Ajdukiewicza, bowiem eliminujące z rozważań nazwy abstrakcyjne). W ten sposób, *własność* jest tu rozumiana jako cecha, która może przysługiwać rzeczy fizykalnej, a nie innej cesze, obiektom matematycznym czy zjawiskom psychicznym.

Założenie 2. Wśród własności przysługujących przedmiotom występują cechy wykluczające się, a więc takie, że nie istnieje obiekt, któremu by przysługiwały.

Założenie 3. Istnieją cechy przysługujące każdemu obiektowi.

Założenie 4 (mocna zasada identyczności Leibniza). Jeżeli wszystkie cechy jednego obiektu przysługują drugiemu, to są to identyczne obiekty.

Założenie 4 jest intuicyjnie uzasadnione w obecności założenia 1. Gdyby nazwa „obiekt" odnosiła się również do np. przedmiotów niezupełnych, założenie 4 byłoby fałszywe.

Kolejne, piąte założenie jest być może zbyt silne, w każdym razie wymaga nieco uzasadnienia. Mimo iż definicja treści nazwy oparta jest na pojęciu zakresu nazwy, w praktyce posługiwania się nazwami to treść jest pierwotna w stosunku do zakresu: dzięki treści – cechom, które się nań składają, użytkownik nazwy jest w stanie określić jej desygnaty, a w konsekwencji zakres. Jeśli dysponuję nazwą, której treści nie znam, np. nazwą „Adour", nie ustalę jej desygnatów. Takie ustalenie będzie możliwe dopiero wtedy, gdy nazwa wskazuje na swoją treść, np. „najdłuższa rzeka baskijskiego rejonu Francji". Sam Ajdukiewicz zwraca uwagę na tę zależność zakresu od treści, mówiąc o *charakteryzowaniu* zakresu przez treść – por. cytaty 3, 4, 5.

Dysponowanie cechami przedmiotów pozwala te przedmioty wyodrębniać spośród innych. W pewnych przypadkach znajomość cech pozwala na stwierdzenie, iż nie istnieje obiekt, który te cechy posiada. W innych przypadkach, gdy po pierwsze, mamy pewność co do istnienia obiektu, któremu dane cechy przysługują, po drugie owych cech jest skończenie wiele, można wprowadzić do języka jedną nazwę abstrakcyjną pojedynczej własności, której przysługiwanie jest tożsame z przysługiwaniem wszystkich tamtych cech. Np. przysługiwanie cech *czworoboczności*, *równoboczności*, *równokątności* jest tożsame z przysługiwaniem jednej cechy: *kwadratowości*. Być może wymóg skończoności wyjściowego zbioru cech jest zbyt ostrożny. Dysponowanie taką nazwa abstrakcyjną (jednej własności) prowadzi bezpośrednio do urobienia nazwy konkretnej, np. „przedmiot kwadratowy", której zakres jest określony przez treść złożoną z owych cech lub przez inną treść – tę złożoną z owej jednej własności. W jeszcze innych wypadkach jest tak, że dla ustalonego skończonego zbioru własności nie istnieje nazwa abstrakcyjna pojedynczej cechy, której przysługiwanie byłoby tożsame z przysługiwaniem własności z tego zbioru. Mimo to można utworzyć nazwę konkretną złożoną (utworzoną odpowiednio z nazw abstrakcyjnych owych własności) denotującą te i tylko te obiekty, którym przysługują wszystkie własności z owego zbioru, a więc której zakres jest wyznaczony przez treść będącą tym zbiorem. Powyżej podany przykład nazwy: „najdłuższa rzeka baskijskiego rejonu Francji", ma ten charakter. Poniższe założenie być może wymaga ograniczenia do skończonych zbiorów cech. Być może jednak jest tak (nie umiemy rozstrzygnąć takiej zawiłej metafizycznej kwestii), że dla dowolnego zbioru cech *W* istnieje taki skończony zbiór cech *W’* (niekoniecznie podzbiór *W*), że dla dowolnego przedmiotu, wszystkie cechy z *W* przysługują temu przedmiotowi zawsze i tylko wtedy, gdy przysługują mu wszystkie cechy z *W’*.

Założenie 5. Dowolny zbiór cech taki, że istnieje obiekt, któremu one przysługują, jest treścią charakterystyczną pewnej nazwy.

Formalizacja

Idąc tropem Gantera i Willego (1999), niech O będzie klasą wszystkich obiektów indywidualnych, fizykalnych, zaś W – klasą wszystkich własności, które mogą przysługiwać obiektom z klasy O. Dla dowolnych $o \in \mathsf{O}$ oraz $w \in \mathsf{W}$: $o \ \rho \ w$ wtw obiekt *o* posiada własność *w* (własność *w* przysługuje obiektowi *o* – por. Ganter, Wille 1999: 17). Relacja ρ wyznacza związek Galois (*f*,g) postaci: dla dowolnego zbioru obiektów *O*, *f*(*O*) jest zbiorem wszystkich tych i tylko tych własności, które przysługują każdemu obiektowi ze zbioru *O*. Tymczasem, dla dowolnego zbioru własności *W*, *g*(*W*) jest zbiorem wszystkich tych i tylko tych obiektów, którym przysługują wszystkie cechy z *W*. Widać teraz wyraźniej rolę założenia 1. Bez niego mógłby nie istnieć dla jakiejś własności *w* zbiór *g*(*w*) tych i tylko tych obiektów, którym ta własność przysługuje, tzn. nie istniałby związek Galois wyznaczony przez taką relację ρ. Na przykład gdyby uznawać tu za obiekty nie tylko fizykalne rzeczy jednostkowe, ale również zbiory teoriomnogościowe, to wówczas, gdy *w* jest własnością nienależenia do samego siebie, a więc przysługuje obiektowi (zbiorowi) *o* dokładnie wtedy, gdy $o \notin o$, to właśnie zbiór *g*(*w*) $(=\{o\colon o \notin o\})$, z dobrze znanych powodów, nie istniałby. Z całą pewnością rozważanie cech przysługujących abstrakcyjnym obiektom może być antynomialne i w konsekwencji nie gwarantować istnienia powyższego związku Galois. Prawdę powiedziawszy, nie mamy automatycznie gwarancji istnienia takiego związku, gdy w powyższą relację ρ wchodzą wyłącznie obiekty jednostkowe fizykalne. Intuicyjnie tak się tylko wydaje, że oto dla dowolnego zbioru własności *W* istnieje zawsze zbiór (tzn. jego istnienie nie prowadzi do absurdu; może to być zbiór pusty) tych i tylko tych obiektów fizykalnych jednostkowych, którym każda własność z *W* przysługuje. Jeśli jednak nie jest to prawdą, to założenie 1 należałoby sformułować inaczej – tak, aby wyrażało po prostu istnienie owego związku Galois. Właściwie, dzięki własności (5) związków Galois (dla dowolnego zbioru własności *W*, $g(W) = \cap\{g(w)\colon w \in W\}$) wystarcza ograniczyć się do takich obiektów i ich własności, dla których prawdziwy jest pewnik Cantora: dla dowolnej własności (powiedzmy *w*) istnieje zbiór (tutaj: *g*(*w*)) tych i tylko tych obiektów, którym własność ta przysługuje. Być może więc należałoby założenie 1 w ten sposób sformułować.

Założenia 2, 3, 4 można teraz zapisać odpowiednio w postaci:

(7) istnieje $W \subseteq \mathsf{W}$ taki, że $g(W) = \varnothing$, co wraz z antymonotonicznością funkcji g implikuje: $g(\mathsf{W}) = \varnothing$,

(8) $f(\mathsf{O}) \neq \varnothing$, lub równoważnie, $g(w) = \mathsf{O}$, dla pewnej własności $w \in \mathsf{W}$,

(9) dla dowolnych $o_1, o_2 \in \mathsf{O}$, $f(o_1) \subseteq f(o_2) \Rightarrow o_1 = o_2$
(tutaj dla dowolnego $o \in \mathsf{O}$, $f(o)$, właściwie: $f(\{o\})$, jest zbiorem wszystkich tych i tylko tych własności, które przysługują obiektowi o).

Zwykła zasada identyczności Leibniza ma w tej notacji postać: $f(o_1) = f(o_2) \Rightarrow o_1 = o_2$. Zauważmy, że (9) jest równoważne koniunkcji tejże zasady oraz następującej implikacji: $f(o_1) \subseteq f(o_2) \Rightarrow f(o_1) = f(o_2)$, dla dowolnych $o_1, o_2 \in \mathsf{O}$. Z kolei, ta implikacja jest równoważna następującej: $f(o_1) \neq f(o_2) \Rightarrow \neg(f(o_1) \subseteq f(o_2))$ oraz $\neg(f(o_2) \subseteq f(o_1))$. W ten sposób, uznając (9), tzn. założenie 4, tym samym zakładamy zasadę Leibniza oraz zdanie: jeżeli dwa obiekty różnią się cechami, to każdy z nich ma taką cechę, której drugi nie posiada.

Ustalmy nazwę N oraz jej zakres O_N zawarty w O. Zgodnie z procedurą Ajdukiewicza definiowania treści, zbiór O_N uważamy za pierwotnie dany, czy wyróżniony w stosunku do treści nazwy N. Definiowalność zakresu poprzez treść rozważymy później. Na podstawie cytatu 2 otrzymujemy następujące definicje:

zbiór cech $f(O_N)$ nazywamy *treścią pełną* nazwy N,

mówimy, że zbiór własności $W \subseteq \mathsf{W}$ jest *treścią charakterystyczną* danej nazwy N, gdy dla dowolnego obiektu $o \in \mathsf{O}$, o jest desygnatem nazwy N (należy do zakresu O_N) wtw obiekt o posiada każdą cechę z W (a więc o należy do zbioru $g(W)$).

Powyższą definicję, na mocy teoriomnogościowego aksjomatu identyczności (mówiącego, iż zbiory są identyczne, o ile mają te same elementy), można skrócić do sformułowania:

dowolny zbiór własności W jest *treścią charakterystyczną* nazwy N, *gdy* $O_N = g(W)$.

Ponadto, rodzina $\mathfrak{W}_N = \{W \subseteq \mathsf{W}: O_N = g(W)\}$ wszystkich treści charakterystycznych nazwy N, jest taka, że treść pełna: $f(O_N)$, do niej należy (por. cytat 2). Mamy więc, $O_N = g(f(O_N)) = C_1(O_N)$ (por. (1')). Zatem:

(10) zakres nazwy jest zbiorem obiektów C_1-domkniętym,

co jest oczywiście równoważne niepustości rodziny wszystkich treści charakterystycznych tej nazwy (na mocy (2')). Z kolei, zgodnie z (4') otrzymujemy:

(11) treść pełna nazwy N jest największą treścią charakterystyczną tej nazwy

oraz

(12) $\mathfrak{W}_N = \{W \subseteq \mathsf{W}: f(O_N) = C_2(W)\}$,

w szczególności, $f(O_N) = C_2(f(O_N))$, tzn.

(13) treść pełna nazwy N jest zbiorem własności domkniętym ze względu na C_2.

Zauważmy, że rodzina $\mathfrak{W}_N$ jest zamknięta na sumę teoriomnogościową, tzn.

(14) dla dowolnego $\varnothing \neq \mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}_N : \cup\mathfrak{W} \in \mathfrak{W}_N$.

Bowiem, na mocy (5) mamy: $g(\cup\mathfrak{W}) = \cap\{g(W): W \in \mathfrak{W}\} = O_N$, gdy $\varnothing \neq \mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{W}_N$, bo wtedy dla każdego $W \in \mathfrak{W}$, $g(W) = O_N$.

Na mocy (14): $\cup\mathfrak{W}_N \in \mathfrak{W}_N$, zatem $\cup\mathfrak{W}_N$ jest największym elementem w rodzinie $\mathfrak{W}_N$; stąd i z (11) mamy więc:

(15) $\cup\mathfrak{W}_N = f(O_N)$.

Zgodnie z cytatem 3, w rodzinie $\mathfrak{W}_N$ istnieją elementy minimalne – treści konstytutywne nazwy N. Według (12) są to elementy minimalne w zbiorze: $\{W \subseteq \mathsf{W}: f(O_N) = C_2(W)\}$. Każda własność $w \in C_2(W) - W$ $(= f(O_N) - W)$, gdzie W jest dowolną treścią charakterystyczną nazwy N, w szczególności treścią konstytutywną, czyli każda własność przysługująca wszystkim desygnatom nazwy N, a nienależąca do danej treści charakterystycznej (w szczególności konstytutywnej) tej nazwy, jest cechą konsekutywną ze względu na tę treść charakterystyczną (cytat 4). Wynikanie cech konsekutywnych z danego zbioru cech (cytat 4, por. również (6)) jest więc reprezentowane w postaci operacji domknięcia C_2. Należy pamiętać o relatywizacji konsekutywności względem danej treści charakterystycznej. Dysponując na przykład dwiema różnymi, a nawet rozłącznymi treściami konstytutywnymi W, W' tej samej nazwy, można prawdziwie powiedzieć, że dla dowolnej cechy $w \in W'$ zachodzi: $w \in C_2(W) - W$, tzn. każda cecha z W', mimo że należy do pewnej treści konstytutywnej, jest cechą konsekutywną ze względu na inną treść konstytutywną, tutaj: W. Jest tak dlatego, iż $g(W) \subseteq g(w)$ (por. (6)), tzn. każdy obiekt posiadający wszystkie cechy z treści konstytutywnej W (a wiec desygnat nazwy o tej treści) posiada również cechę w, skoro jest ona cechą należącą do treści konstytutywnej (co prawda innej) tej samej nazwy. Np. *kwadratowość* $\in C_2(\{$*czworoboczność*, *równoboczność*, *równokątność*$\}) - \{$*czworoboczność*, *równoboczność*, *równokątność*$\}$. Warto również wspomnieć, że dowolna cecha przysługująca wszystkim obiektom – por. (8) oraz założenie 3 – jest konsekutywna ze względu na jakikolwiek zbiór cech, do którego ona sama nie należy. Bowiem dla takiej cechy w mamy oczywiście: $g(w) = \mathsf{O}$, zatem dla dowolnego $W \subseteq \mathsf{W}$: $g(W) \subseteq g(w)$, tzn. $w \in C_2(W)$ (por. (6)).

Scharakteryzowaliśmy, zgodnie z tekstem Ajdukiewicza, zbiór $\mathcal{W}_N$ wszystkich treści charakterystycznych danej nazwy N. Tymczasem, zaczynając od jej treści pełnej, $f(O_N)$, będącej, na mocy (13), zbiorem C_2-domkniętym, można by analogicznie opisywać rodzinę $\mathcal{O}_N = \{O \subseteq \mathsf{O}\colon f(O_N) = f(O)\} = \{O \subseteq \mathsf{O}\colon O_N = C_1(O)\}$ (por. (4') oraz (10)) wszystkich zbiorów obiektów charakteryzowanych tą samą treścią pełną nazwy N, co dla Ajdukiewicza nie jest interesujące.

Z kolei założenie 5 wymusza nowe istotne konsekwencje. Biorąc pod uwagę definicję treści charakterystycznej nazwy, założenie to można sprecyzować następująco:

(16) dla dowolnego $W \subseteq \mathsf{W}$ $(g(W) \neq \varnothing \Rightarrow$ istnieje nazwa N taka, że $O_N = \mathrm{g}(W))$.

Ponieważ ponadto istnieją nazwy N (mianowicie puste) takie, że $O_N = \varnothing$, więc w konsekwencji, (16) skutkuje tezą:

(17) dla dowolnego $W \subseteq \mathsf{W}$ istnieje nazwa N taka, że $O_N = g(W)$.

Z kolei (17) na mocy (2') oznacza, że każdy C_1-domknięty zbiór obiektów jest zakresem pewnej nazwy. To zaś wraz z (10) prowadzi do konkluzji:

(18) dla dowolnego zbioru obiektów O: O jest domknięty względem operacji C_1 wtw O jest zakresem pewnej nazwy.

W takim razie, dla dowolnego zbioru obiektów O, zbiór $C_1(O)$ jest najmniejszym spośród zakresów nazw zawierających O (korzystamy tu z ogólnego faktu dotyczącego operacji domknięcia C, iż dla dowolnego zbioru X, zbiór $C(X)$ jest najmniejszym, względem inkluzji, spośród wszystkich C-domkniętych zbiorów zawierających X). W szczególności, $C_1(\emptyset) = \emptyset$. Ponadto, biorąc pod uwagę (6) oraz (9), otrzymujemy:

(19) dla dowolnego obiektu $o \in \mathsf{O}$, $C_1(\{o\}) = \{o\}$,

zatem dowolny zbiór złożony z jednego obiektu jest zakresem pewnej nazwy.

Inną konsekwencją (17) jest:

(20) dowolny zbiór własności domknięty ze względu na operację C_2 jest treścią pełną pewnej nazwy.

Bowiem, gdy W jest C_2-domknięty, to na mocy (17) oraz (1'), dla pewnej nazwy N otrzymujemy: $f(O_N) = f(g(W)) = C_2(W) = W$.

Tezy (20) i (13) bezpośrednio prowadzą do konkluzji:

(21) dla dowolnego zbioru własności W: W jest domknięty względem operacji C_2 wtw W jest treścią pełną pewnej nazwy.

W końcu, biorąc pod uwagę (18) oraz (21), na mocy (3') stwierdzamy:

(22) funkcja f przyporządkowująca każdemu zakresowi nazwy jej treść pełną jest dualnym izomorfizmem przekształcającym rodzinę wszystkich zakresów nazw na rodzinę wszystkich treści pełnych nazw; funkcja g obcięta do rodziny wszystkich treści pełnych nazw jest izomorfizmem odwrotnym.

Zatem w szczególności, dla dowolnych nazw N, N' zachodzi:

(23) $O_N \subseteq O_{N'}$ wtw $f(O_{N'}) \subseteq f(O_N)$,

tzn. zakres jednej nazwy zawiera się w zakresie drugiej wtedy i tylko wtedy, gdy treść pełna drugiej nazwy zawiera się w treści pełnej nazwy pierwszej. Jest jasne, że zastąpienie w tym twierdzeniu wyrażenia „treść pełna" wyrażeniem „treść charakterystyczna" daje zdanie fałszywe (por. cytat 6). Bowiem w ogólności, nie zachodzi implikacja: $O_N \subseteq O_{N'} \Rightarrow W' \subseteq W$, gdzie $O_N = g(W)$ oraz $O_{N'} = g(W')$ (tzn. W, W' są jakimiś treściami charakterystycznymi odpowiednio nazw *N*, *N'*). Aby się o tym przekonać, wystarczy rozważyć jedną nazwę: $N = N'$ oraz dwie jej rozłączne treści konstytutywne (np. nazwę „przedmiot kwadratowy" oraz W = {czworoboczność, równoboczność, równokątność}, W' = {kwadratowość}). Tymczasem oczywiście odwrotna implikacja:

(24) $W' \subseteq W \Rightarrow O_N \subseteq O_{N'}$ (jeśli jakaś treść charakterystyczna jednej nazwy zawiera się w jakiejś treści charakterystycznej drugiej nazwy, to zakres drugiej nazwy jest podzbiorem zakresu pierwszej nazwy),

jest prawdziwa – jest to warunek antymonotoniczności funkcji *g*.

Zauważmy jeszcze, że na mocy (2') oraz (20) otrzymujemy:

(25) dla dowolnego zbioru obiektów O, $f(O)$ jest treścią pełną pewnej nazwy.

Jest to dualny odpowiednik warunku (17), implikowany w konsekwencji przez (17), który to warunek jest z kolei implikowany przez założenie 5. Naturalnie, w (25) chodzi o tę nazwę, której zakres ma postać $g(f(O))$ (bo g jest odwrotnym dualnym izomorfizmem – por. (22)), tzn. ma postać: $C_1(O)$, por. (1'), czyli jest najmniejszym ze wszystkich zakresów nazw zawierających wszystkie obiekty ze zbioru O. Zatem (25) można sformułować w formie analogicznej do założenia 5:

(26) dowolny zbiór obiektów jest *zakresem charakterystycznym* pewnej nazwy,

gdzie przez „zakres charakterystyczny" nazwy N rozumiemy dowolny zbiór obiektów O taki, że $O_N = C_1(O)$ (lub równoważnie: $f(O_N) = f(O)$ – por. uwagę następującą bezpośrednio przed formalizacją założenia 5; zakres danej nazwy byłby tu *pełnym* zakresem charakterystycznym).

Ponadto, f jest funkcją antymonotoniczną: dla dowolnych zbiorów obiektów O, O':

(27) $O \subseteq O' \Rightarrow f(O') \subseteq f(O)$,

zatem jeżeli jeden zbiór obiektów jest podzbiorem drugiego, to treść pełna nazwy, której zakresem charakterystycznym jest drugi zbiór, jest podzbiorem treści pełnej tej nazwy, której zakresem charakterystycznym jest pierwszy zbiór.

Bibliografia

Ajdukiewicz K. (1975), *Logika pragmatyczna*, PWN, Warszawa.
Denecke K., Erné M., Wismath S.L. (eds.) (2004), *Galois Connections and Applications*, Kluwer.
Domenach F., Leclerc B. (2001), *Biclosed binary relations and Galois connections*, „Order" 18, s. 89–104.
Ganter B., Wille R. (1999), *Formal Concept Analysis*, Springer.

Streszczenie

Szeroko znane, czy wręcz popularne, pojęcia Ajdukiewicza *zakresu* i *treści* nazwy zostały w taki sposób zdefiniowane w *Logice pragmatycznej*, iż jest rzeczą zupełnie naturalną scharakteryzować je przy użyciu antymonotonicznego związku Galois, określonego w sposób standardowy dla innych celów przez Gantera i Willego w *Formal Concept Analysis* (1999), w oparciu o binarną relację ρ zachodzącą między obiektami a własnościami: obiekt o jest w relacji ρ z własnością w ($o \rho w$) wtedy i tylko wtedy, gdy w jest cechą o. Ów związek Galois jest parą (f,g) dwóch funkcji, f: $P(\mathrm{O}) \to P(\mathrm{W})$, przekształcającej rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru O wszystkich obiektów indywidualnych fizykalnych w rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru W wszystkich własności, które mogą przysługiwać obiektom z klasy O, oraz funkcji g: $P(\mathrm{W}) \to P(\mathrm{O})$, zdefiniowanych następująco: dla dowolnych zbioru obiektów $O \subseteq \mathrm{O}$ oraz własności $w \in \mathrm{W}$, $w \in f(O)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $o \in O$, $o \rho w$; $f(O)$ jest zatem zbiorem wszystkich tych i tylko tych własności, które przysługują każdemu obiektowi ze zbioru O; dla dowolnych zbioru własności $W \subseteq \mathrm{W}$ oraz obiektu $o \in \mathrm{O}$, $o \in g(W)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $w \in W$, $o \rho w$; $g(W)$ jest zatem zbiorem wszystkich tych i tylko tych obiektów, którym przysługują wszystkie cechy z W. Najpierw poświęcamy uwagę związkom Galois w ogólności, następnie ich standardowej postaci w szczególności. Z kolei przypominamy pojęcia zakresu i treści nazwy według Ajdukiewicza. Wreszcie prezentujemy ich charakterystykę przy użyciu związku Galois.