

Bożena Czernecka-Rej

11 powodów, dlaczego logika intuicjonistyczna nie jest (tak) piękna

Słowa kluczowe: logika intuicjonistyczna, logika klasyczna, prawo logiki, wartość logiczna, prawda, konstrukttywizm

„Logika intuicjonistyczna nie jest tak swojska, wygodna, prosta i piękna, jak nasza logika” napisał W.V.O. Quine w *Philosophy of Logic*¹. Pisząc „nasza”, miał oczywiście na myśli klasyczny rachunek logiczny. Naszą logikę stawiał za wzór jasności, elegancji i sprawności. Ponadto przypisywał jej takie atrybuty, jak: powszechność stosowania, wysoki stopień oczywistości prawd, brak specyficznego przedmiotu.

Celem niniejszego tekstu jest wydobyć tych cech logiki intuicjonistycznej, z powodu których nie jest ona uważana (przez Quine’a i nie tylko) za piękną, wygodną, prostą i swojską. Mówiąc bardziej precyzyjnie: chodzi o ukazanie własności tej logiki, które różnią ją od standardów, jakie wyznacza logika klasyczna. Własności te jawią się zarówno na poziomie czysto formalnym (syntaktycznym), jak i w warstwie interpretacji (semantyki), a także w sferze filozoficznej. Wystarczy dokonać takiej analizy w odniesieniu do logiki zdań, ponieważ intuicjonistyczny rachunek kwantyfikatorów otrzymuje się, dodając do intuicjonistycznego rachunku zdań te same aksjomaty i reguły (lub tylko reguły) dla kwantyfikatorów, jakie występują w klasycznym rachunku kwantyfikatorów.

I. Kłopoty z aksjomatyzacją

Aksjomatyzacja klasycznego rachunku logicznego jest powszechnie uważana za wielkie osiągnięcie logików z przełomu XIX i XX w. (G. Frege 1879, B. Russell i A.N. Whitehead 1910–1913). W latach 20. ubiegłego stulecia podano już różne

¹ Quine 1977: 129.

bazy aksjomatyczne tego rachunku i próbowano je porównywać, stosując takie kryteria, jak: wzajemna niezależność aksjomatów, ich liczba, długość, organiczność, liczba różnych symboli występujących w aksjomatach itp.

Tymczasem twórca intuicjonizmu Luitzen E.J. Brouwer konsekwentnie utrzymywał sceptyczną postawę w odniesieniu nie tylko do aksjomatyzacji, ale jakiegokolwiek formalizacji intuicjonistycznej logiki i matematyki. Postawa ta wynikała z głoszonej przez niego tezy, że nie da się skodyfikować wszystkich poprawnych schematów myślowych. Logika posiadająca statyczny charakter nie jest w stanie ująć dynamicznej i nigdy niezamkniętej dziedziny, jaką jest myślowa aktywność człowieka². Brouwer ograniczył się do nieformalnych rozważań na temat pożądanej natury dowodu i znaczenia stałych logicznych.

Uczeń Brouwera, Arend Heyting, nie chcąc pozostawiać logiki intuicjonistycznej poza kręgiem logiki formalnej, dokonał jej formalizacji w postaci systemu aksjomatycznego³. Z tej też racji uchodzi on za właściwego twórcę intuicjonizmu. Aksjomatyzacja Heytinga była pierwszą⁴ prezentacją intuicjonizmu w języku zrozumiałym dla ogółu logików i matematyków, pozbawionym niejasnych i wieloznacznych stwierdzeń Brouwera. Dała ona możliwość porównania logiki klasycznej i logiki intuicjonistycznej⁵.

Heyting miał świadomość trudności wynikających z formalizacji, kiedy pisał:

[...] o żadnym systemie formalnym nie można dowieść, iż adekwatnie przedstawia teorię intuicjonistyczną. Interpretacja symboli nigdy nie jest w pełni jednoznaczna, nigdy też nie można dowieść z matematyczną ścisłością, że system aksjomatów faktycznie obejmuje każdą ogólnie ważną metodę dowodu⁶.

Ostatecznie przystał na to, że system aksjomatyczny poprawnie kodyfikuje zasady logiczne stosowane w matematyce intuicjonistycznej w obecnym czasie⁷.

Heyting przyjął następujące formuły jako aksjomaty intuicjonistycznego rachunku zdań:

- A1 $p \rightarrow p \wedge p$
- A2 $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$
- A3 $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

² Placek 1999: 54–59.

³ Heyting 1930: 42–56.

⁴ Wcześniej A.N. Kołmogorow (1925) i W.I. Gliwienko (1928) podali formalizacje fragmentów intuicjonistycznego rachunku zdań.

⁵ Była gestem w kierunku poprawy wzajemnego zrozumienia między intuicjonistą a logikiem klasycznym. Henkin 1974: 77.

⁶ Heyting 1966: 102.

⁷ Brouwer odniósł się zdecydowanie negatywnie do podjętej przez Heytinga próby kodyfikacji dopuszczanych przez intuicjonistów sposobów wnioskowania, nie uważając jej za próbę ortodoksyjną dla intuicjonizmu.

- A4 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
 A5 $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
 A6 $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
 A7 $p \rightarrow p \vee q$
 A8 $p \vee q \rightarrow q \vee p$
 A9 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$
 A10 $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
 A11 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$

oraz standardowe reguły inferencji (podstawiania i odrywania).

Łatwo zauważyć, że osobliwością powyższej aksjomatyki jest duża liczba wzajemnie niezależnych aksjomatów. Heyting dowiódł tej niezależności metodą cechy dziedzicznej. Aksjomatyki równoważne z tą podaną przez Heytinga opracowali m.in. S. Jaśkowski (1936), M. Wajsberg (1937), A. Tarski (1938), J. Łukasiewicz (1941).

II. Separowalność funktorów

Duża liczba aksjomatów, niezależnych od siebie, jest konsekwencją tego, że podstawowe funktory w logice intuicjonistycznej, w przeciwieństwie do wzajemnie definiowalnych funktorów logiki klasycznej, są separowalne. Twierdzenie o separowalności, znane jako twierdzenie Wajsberga-McKinsey'a⁸, można sformułować następująco: żaden z funktorów intuicjonistycznej logiki zdań: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, nie jest na gruncie tej logiki definiowalny za pomocą pozostałych funktorów. Wszystkie stałe logiczne występujące w aksjomatyce muszą być zatem terminami pierwotnymi.

III. 'Wyrwa' w prawach logiki

Skoro funktory intuicjonistycznego rachunku zdań są separowalne, to tezami nie będą formuły stwierdzające równoważność wyrażeń typu: $p \vee q$ i $(p \rightarrow q) \rightarrow q$, $p \vee q$ i $\neg p \rightarrow q$, $p \vee q$ i $\neg(\neg p \wedge \neg q)$, $p \rightarrow q$ i $\neg p \vee q$, $p \rightarrow q$ i $\neg(p \wedge \neg q)$, $p \wedge q$ i $\neg(\neg p \vee \neg q)$. W przeciwnym bowiem razie można by zdefiniować alternatywę za pomocą implikacji lub negacji i implikacji, lub negacji i koniunkcji, zaś implikację za pomocą negacji i alternatywy lub negacji i koniunkcji, a koniunkcję za pomocą negacji i alternatywy. Takie definicje są czymś naturalnym dla klasycznego rachunku zdaniowego. Wystarczy tu przyjąć dwa spośród wymienionych funktorów, aby wprowadzić pozostałe.

Tezami intuicjonistycznej logiki nie są implikacje:

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow p \vee q$$

⁸ Udowodnili je niezależnie od siebie Wajsberg 1938: 45–101 oraz McKinsey 1939: 155–158.

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) &\rightarrow \neg p \vee q \\
 (\neg p \rightarrow q) &\rightarrow p \vee q \\
 \neg(p \wedge \neg q) &\rightarrow (p \rightarrow q) \\
 \neg(\neg p \wedge \neg q) &\rightarrow p \vee q \\
 \neg(\neg p \vee \neg q) &\rightarrow p \wedge q
 \end{aligned}$$

Inne, ważne z klasycznego punktu widzenia, prawa odrzucane przez intuicjonistów to:

$\neg\neg p \rightarrow p$	silne prawo podwójnej negacji
$p \vee \neg p$	prawo wyłączonego środka
$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	silne prawo transpozycji
$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$	prawo de Morgana
$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	paradoks materialnej implikacji

IV. Nieskończona matryca adekwatna

Matrycowa charakterystyka klasycznego rachunku zdań nie sprawia żadnych problemów. Ponieważ funktory tego rachunku są prawdziwościowe, wartość logiczna zdań zbudowanych za pomocą tych funktorów jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości logiczne jego argumentów. Matrycą adekwatną jest oczywiście matryca dwuwartościowa.

Heyting zbudował intuicjonistyczny rachunek zdań metodą aksjomatyczną, dedukując twierdzenia z przyjętych aksjomatów. Przy końcu jednak dzieła *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* użył matryc trójwartościowych, aby wykazać, że silna zasada podwójnej negacji oraz zasada wyłączonego środka nie dadzą się w tym systemie dowieść. Są one następujące:

$\rightarrow$	1	0	2	$\neg$	$\wedge$	1	0	2	$\vee$	1	0	2
1*	1	0	2	0	1	1	0	2	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	2
2	1	0	1	0	2	2	0	2	2	1	2	2

Wartość 1 przysługuje zdaniom prawdziwym, 0 – zdaniom fałszywym, 2 – zdaniom, które nie są fałszywe, ale których prawdziwości nie udowodniono; wartością wyróżnioną jest 1. Matryce Heytinga zawierają w sobie wypadki ustalone przez matryce logiki dwuwartościowej, czyli dla kombinacji 11, 10, 01 i 00 matryce te są identyczne. Ponieważ funktory są niedefiniowalne, zachodzi potrzeba podania tabelki dla nich wszystkich.

Okazało się szybko, że matryca Heytinga jest tylko przybliżoną matrycą, w tym sensie, że wszystkie tezy intuicjonistycznej logiki zdań otrzymują w niej wartość wyróżnioną, lecz istnieją formuły spełniające matrycę, a niewynikające z aksjomatów, np.:

$$\begin{aligned}
& (\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow p \vee \neg p^9 \\
& \neg p \vee \neg\neg p \\
& (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \\
& p \vee (p \rightarrow q \vee \neg q) \\
& [(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow p \vee \neg p] \rightarrow (\neg p \vee \neg\neg p) \\
& (\neg p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)
\end{aligned}$$

Kolejnym krokiem na drodze poszukiwania adekwatnej matrycy było skonstruowanie matryc 5-wartościowych (nie jest w nich spełniona np. formuła $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$), lecz i tak zbiór wyrażeń spełnionych według matryc był obszerniejszy od zbioru tez logiki intuicjonistycznej. Dopiero K. Gödel (1932) wykazał, że żadna matryca skończenie wartościowa nie jest adekwatna dla logiki Heytinga, zawsze bowiem można znaleźć formułę, która nie wynika z aksjomatów, a jest sprawdzona przez matryce, w których sprawdzone są aksjomaty¹⁰. S. Jaśkowski (1936) uzupełnił ten wynik, podając sposób konstrukcji matryc adekwatnych względem logiki intuicjonistycznej. Konstrukcja polega na określeniu ciągu matryc przez przechodzenie od matrycy n -wartościowej do $n+1$ -wartościowej. Jest to ciąg nieskończony, który można zastąpić jedną matrycą nieskończenie-wartościową. Jaśkowski udowodnił, że zbiór twierdzeń logiki Heytinga jest identyczny ze zbiorem twierdzeń spełnionych w takiej nieskończenie-wartościowej matrycy¹¹.

V. Wielowartościowościowy charakter

W stosunku do logiki intuicjonistycznej można postawić pytanie, czy jest ona odmianą logiki wielowartościowej. Pierwotne motywacje, które doprowadziły do powstania tej logiki, nie były sprzężone z wielowartościowością. Dopiero po skonstruowaniu systemu metodą aksjomatyczną okazało się, że jego matryca charakterystyczna nie może być dwuwartościowa ani nawet skończenie wielowartościowa. Pod tym względem logika intuicjonistyczna jest podobna do logik modalnych, dla których również adekwatne są matryce nieskończone. We współczesnej literaturze istnieje tendencja, aby sytuacji takiej nie klasyfikować jako wielowartościowości logiki, w odróżnieniu od takich logik, dla których matryca więcej niż dwuwartościowa (i niesprowadzalna do dwuwartościowej) jest punktem wyjścia ich budowy¹².

Ponieważ matrycą jest algebra, charakterystyka matrycowa systemu jest charakterystyką algebraiczną, czyli syntaktyczną, czysto formalną. Wartości matrycy nie muszą więc być interpretowane semantycznie, tzn. nie muszą istnieć seman-

⁹ Wystarczy sprawdzić dla $p=2$: $(\neg\neg 2 \rightarrow 2) \rightarrow 2 \vee \neg 2 = (\neg 0 \rightarrow 2) \rightarrow 2 \vee 0 = (1 \rightarrow 2) \rightarrow 2 = 2 \rightarrow 2 = 1$.

¹⁰ Gödel 1986: 222–225.

¹¹ Jaśkowski 1936: 58–61 oraz Surma 1971: 21–54.

¹² Jeszcze w pierwszej połowie XX w. logika intuicjonistyczna była zaliczana do logik wielowartościowych (m.in. przez J. Łukasiewicza, T. Czeżowskiego, T. Kotarbińskiego).

tyczne korelaty wartości logicznych. Źródło nieporozumień tkwi w utożsamieniu syntaktycznego pojęcia spełniania w matrycy i semantycznego pojęcia prawdziwości w modelu¹³. Na terenie klasycznego rachunku zdań warunki spełniania w matrycy (dwuwartościowej) i prawdziwości w modelu pokrywają się, zatem wartości matrycy 1 i 0 mogą być interpretowane jako semantyczne własności, odpowiednio prawdziwości i fałszywości. Jednakże w przypadku intuicjonistycznego rachunku zdań nieistnienie adekwatnej matrycy dwuwartościowej nie jest związane z założeniem, że oprócz prawdy i fałszu istnieją inne wartości logiczne, jeśli termin „wartość logiczna” jest rozumiany jako termin semantyczny, tak jak terminy „prawda”, „fałsz”.

VI. Nieklasyczne pojęcie prawdy

U podłoża intuicjonizmu leży nie tyle odrzucenie podziału zdań na prawdziwe i fałszywe, co zmiana samej koncepcji prawdy. Prawda klasycznie pojęta jest zgodnością (*adequatio*) poznania z rzeczywistością – i albo ta zgodność zachodzi, albo nie. Dlatego jest ona niezmienna, niestopniowana, niezależna od tego, kto i w jakich okolicznościach ją stwierdza.

Według Brouwera coś jest prawdziwe, jeśli jest przez kogoś doświadczone, nie ma niedoświadczonych prawd¹⁴. Dla Heytinga zdanie jest prawdziwe, jeśli zostało udowodnione – „do pojęcia prawdy docieramy przez kwantyfikację egzystencjalną – zdanie jest prawdziwe, jeśli istnieje konstrukcja, która go dowodzi”¹⁵. Prawa logiki odnoszą się do naszych własnych operacji umysłowych, ich prawdziwość nie może wykraczać poza naszą zdolność dowodzenia. Skonstruowanie dowodu, a nie, jak przy podejściu klasycznym, pewna konfiguracja bytów sprawia, że twierdzenie jest prawdziwe¹⁶. Z perspektywy intuicjonizmu, jeśli zdanie jest w ogóle prawdziwe, to może być ono prawdziwe tylko na mocy czegoś, co możemy poznać i co winniśmy uznać jako świadectwo jego prawdziwości¹⁷. Innymi słowy, prawda przekraczająca możliwości jej stwierdzenia jest pojęciem pustym.

Wróćmy do matryc skonstruowanych przez Jaśkowskiego. Wartości niewyróżnione w następujących po sobie matrycach stale przyrastają o jedną, przy czym wartość ta jest bliższa 1 niż 0. Same matryce generowane są przez funkcję o następujących własnościach: (a) gdy argument funkcji ma wartość wyróżnioną, to wartością funkcji jest nowa wartość logiczna, której w poprzedniej matrycy nie było, (b) gdy argumentem funkcji jest wartość niewyróżniona poprzedniej matrycy, to wartość funkcji jest równa poprzedniej wartości niewyróżnionej. Jaś-

¹³ Borkowski 1990a: 471–473.

¹⁴ Brouwer 1949: 1235–1249.

¹⁵ Dummett 1998: 59–60.

¹⁶ Tamże, 13, 24.

¹⁷ Dummett 1978a: 146.

kowski, zdaniem Z. Zawirskiego, wykazał, że „im dalej posuwamy się w szeregu nowych wartości, tym bardziej zbliżamy się do prawdy”¹⁸. Wartości nieskończonej matrycy są uporządkowane według wzrastającego stopnia uzasadnienia jako właśnie „zbliżające się do prawdy”.

Jeśli istotę prawdziwości upatruje się, jak to czynią intuicjoniści, w stosunku zdania do określonych zabiegów poznawczych, do prób uzasadniania danego zdania, to można mówić o pewnych stopniach uzasadnienia (potwierdzenia) tego zdania. Zgodnie ze standardami intuicjonistycznymi zdanie byłoby prawdziwe w najwyższym stopniu, gdyby zostało niezawodnie uzasadnione¹⁹, natomiast uzasadnione w bardzo niskim stopniu byłoby zdanie, na potwierdzenie którego nie znaleziono jeszcze dostatecznych racji, lecz o którym przypuszcza się (wie się), że nie jest fałszywe. Tak więc żadnej z wartości występujących w matrycy logiki intuicjonistycznej nie można interpretować jako klasycznie pojętej prawdziwości. Wartości te są co najwyżej epistemologicznymi wariantami prawdy. Wyznaczają one podział zdań ze względu na stopień ich uprawomocnienia.

Logika klasyczna i intuicjonistyczna zakładają odmienne kryterium podziału zdań. Pierwsza zakłada ontologiczną podstawę podziału – zdania mogą być zgodne z „bytem”, czyli prawdziwe, lub niezgodne z „bytem” – fałszywe. W intuicjonizmie natomiast przyjmuje się podmiotowe kryterium podziału zdań – dzieli się zdania na uznane (udowodnione) i nieuznane (nieudowodnione). Kryterium to nie opiera się tylko na obiektywnie istniejącej rzeczywistości, lecz uwzględnia także wiedzę podmiotu poznającego o tej rzeczywistości.

VII. Wtórność wobec matematyki

W swojej rozprawie doktorskiej *Over de Grondslagen der Wiskunde*²⁰ (1907) Brouwer zauważył, iż do matematyki rozumianej w duchu intuicjonistycznym nie stosuje się logika klasyczna. Postulował, aby zacząć budowę matematyki i logiki

¹⁸ Jeśli bowiem zastąpimy wartość najbliższą 1 przez 1 w matrycy implikacji i negacji, to z odpowiednich matryc k -wartościowych otrzymujemy matryce k - I -wartościowe. Zastąpienie 2 przez 1 w matrycy Heytinga daje w wyniku zwykłą dwuwartościową matrycę. Natomiast zastąpienie wartości najbliższej 0 przez 0 lub którejs z wartości pośrednich przez wartość sąsiednią burzy wzajemne stosunki poprzedniej matrycy. Wartość 2 jest zatem bliższa 1 niż 0, może bowiem przejść w 1 poprzez skonstruowanie dowodu, nigdy zaś 2 nie może przejść w 0. Matryca Heytinga jest tak zbudowana, że każda implikacja o fałszywym następniku jest fałszywa. Może być to wyrazem zasady, iż nie można uznać przejścia od zdania prawdziwego, nawet najslabiej uzasadnionego, do zdania fałszywego. Zawirski, 1939/46: 211.

¹⁹ Pozostaje oczywiście kwestia, co jest takim niezawodnym uzasadnieniem. Powszechnie przyjmuje się, że, przynajmniej w matematyce, konkluzywnym potwierdzeniem danej tezy jest znalezienie dowodu. Dowód jednak przeprowadza się według pewnych reguł, które kodyfikuje dana logika. Dlatego sprawa się znacznie komplikuje, kiedy spór dotyczy właśnie tych zasad, a ogólniej tego, który system logiczny jest poprawny.

²⁰ Brouwer 1975b: 11–97.

od początku, przy czym wzajemną relację tych dyscyplin rozumiał w osobliwy sposób²¹. Jako pierwszy ogłosił, że logika jest wtórna w stosunku do matematyki²². O ile przy podejściu klasycznym logika stanowi strukturę matematyki, a prawa logiczne są podstawą niezawodnych schematów wnioskowania, o tyle intuicjonista zaczyna od konstrukcji matematycznych, a prawa logiki otrzymuje na drodze uogólnienia uniwersalnie poprawnych metod konstrukcji.

Matematyka intuicjonistyczna jest działalnością istotnie bezjęzykową²³. Dotyczy ona przeprowadzania umysłowych konstrukcji, natomiast logika związana jest z językowym wyrażeniem tych konstrukcji, czyli powstaje wtedy, gdy matematycy uciekają się do języka w celu zatrzymania 'śladów' konstrukcji matematycznych i komunikowania ich innym. W miarę rozwoju wiedzy matematycznej mogą być odkrywane nowe metody przeprowadzania konstrukcji. Matematyk intuicjonista wykonuje swą działalność w czasie, z którym związane jest wzrastanie wiedzy, budowanie nowych dowodów, uznawanie twierdzeń. Z tej racji „logika jest nauką empiryczną”²⁴, która kodyfikuje *a posteriori* zasady rządzące rozumowaniem matematycznym.

Można postawić pytanie, co – jeśli nie zgodność z regułami logiki – decyduje o poprawności wnioskowania matematycznego. Heyting wyjaśnia, że „w matematyce intuicjonistycznej nie wnioskuje się według stałych reguł, które można by skodyfikować w logice, lecz każde pojedyncze wnioskowanie jest sprawdzane bezpośrednio pod kątem swojej oczywistości”²⁵.

VIII. Konstruktywne środki dowodowe

U podstaw intuicjonizmu leży radykalnie odmienne od klasycznego nastawienie względem przedmiotu matematyki. Brouwer zerwał z realizmem platońskim: odrzucił istnienie niezależnej od podmiotu poznającego dziedziny przedmiotowej, którą matematyka jedynie odkrywa i opisuje. Według niego przedmioty matematyki są wytworami pewnych operacji podmiotu.

Heyting podkreślał, że myśl matematyczna nie komunikuje prawd o świecie zewnętrznym, lecz zajmuje się wyłącznie konstrukcjami myślowymi. Przedmioty matematyczne nie istnieją niezależnie od naszej wiedzy o nich, lecz ich *esse est concipi*. Każde „twierdzenie matematyczne jest stwierdzeniem, że została wykonana pewna konstrukcja matematyczna. Jasne, że „przed wykonaniem

²¹ S. Haack wiąże powstanie logiki intuicjonistycznej ze strategią rewizji ujęcia stosunku logiki do matematyki. Haack 1978: 156.

²² „Matematyka jest niezależna od logiki, natomiast logika jest zależna od matematyki”. Brouwer 1975b: 73.

²³ Brouwer 1975a: 510. Brouwer dodaje, że język tylko towarzyszy matematycznemu rozumowaniu.

²⁴ Brouwer 1975b: 74.

²⁵ Heyting 1934: 13.

konstrukcji nie ma jeszcze twierdzenia”²⁶. A.N. Kołmogorow charakteryzując logikę i matematykę intuicjonistyczną pisał, że nie są one naukami badającymi obiekty leżące na zewnątrz nas, lecz są swoistą ‘działalnością’ twórczą w zakresie budowania konstrukcji myślowych nieodpowiadających żadnej rzeczywistości zewnętrznej²⁷.

W opinii intuicjonistów, zachodzi istotna różnica pomiędzy dowodem istnienia przedmiotu pewnego typu przez skonstruowanie efektywnego przykładu takiego przedmiotu a wykazaniem, że gdyby żaden taki przedmiot nie istniał, to można by otrzymać sprzeczność. Niesprzeczność jest jedynie koniecznym, ale niewystarczającym, warunkiem istnienia obiektów matematycznych. Pozytywnym kryterium ich egzystencji jest konstruowalność²⁸. Zdaniem Heytinga wprowadzenie do matematyki sądów o istnieniu bez możliwości konstrukcji jest wprowadzeniem doń ‘teologicznych’ sposobów dowodzenia.

Heyting postawiał sobie za cel zbudowanie systemu, w którym byłyby dopuszczalne wyłącznie konstruktywne środki dowodowe. W logice intuicjonistycznej nie obowiązują zasady umożliwiające nieefektywne dowody twierdzeń egzystencjalnych, m.in.: silne prawo podwójnej negacji²⁹, prawo wyłączonego środka, silne prawo transpozycji.

Przy podejściu założeniowym odrzuca się dowody istotnie nie wprost. Znaczy to, że dla rachunku intuicjonistycznego ważna jest tylko ograniczona reguła tworzenia dowodów założeniowych nie wprost³⁰. Stwierdza ona, że wyrażenie postaci:

$$\varphi_1 \rightarrow \{\varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\varphi_{n-1} \rightarrow \neg\varphi_n)\dots\}$$

jest tezą, jeśli otrzymamy sprzeczność na podstawie założeń $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ oraz założenia dowodu nie wprost φ_n . Ostatni następnik dowodzonej formuły nie może być dowolnym wyrażeniem, lecz musi być poprzedzony funktorem negacji. Konsekwentnie, dla logiki intuicjonistycznej można udowodnić tylko słabe twierdzenie o dedukcji nie wprost:

Jeżeli $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \vdash \psi, \neg\psi$, to $\vdash \varphi_1 \rightarrow \{\varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\varphi_{n-1} \rightarrow \neg\varphi_n)\dots\}$ ³¹.

²⁶ Heyting 1966: 3.

²⁷ Kołmogorow 1955: 83.

²⁸ Z żądaniem konstruktywności związany jest fakt odrzucenia przez Brouwera samej aksjomatycznej metody budowania systemów. Istnienie przedmiotów nie może być przecież tylko postulowane, jak to się czyni w metodzie aksjomatycznej, lecz przedmioty te należy uprzednio skonstruować.

²⁹ Z prawa podwójnej negacji można wyprowadzić prawo wyłączonego środka. W $\neg\neg p \rightarrow p$ podstawiamy za zmienną p wyrażenie $p \vee \neg p$, otrzymujemy $\neg\neg(p \vee \neg p) \rightarrow p \vee \neg p$; ponieważ poprzednik jest tezą logiki intuicjonistycznej (podwójne negacje tez klasycznych są tezami intuicjonistycznymi), więc stosując regułę odrywania, otrzymujemy $p \vee \neg p$.

³⁰ Borkowski 1990b: 174–176.

³¹ Porębska, Suchoń 1991: 99–101.

IX. Dowodowa interpretacja funktorów

Podstawowe funktory klasycznego rachunku zdań charakteryzują się niezależnością tematyczną i uniwersalnością w tym sensie, że występują one w każdej nauce i w każdym języku, niezależnie od treści prowadzonych rozważań. Służą one do opisu najbardziej ogólnych związków między faktami, zdarzeniami, zjawiskami, stanami rzeczy. Koniunkcja na przykład wyraża związek współzachodzenia dwóch faktów, alternatywa – związek niewspólniezachodzenia dwóch faktów, czyli wykluczenia współzachodzenia. Tak więc formułę „ $\phi \wedge \psi$ ” interpretuje się jako: zachodzi (istnieje) stan rzeczy opisany przez ϕ i zachodzi stan rzeczy opisany przez ψ , a formułę „ $\phi \vee \psi$ ” jako: zachodzi (istnieje) stan rzeczy opisany przez ϕ lub zachodzi stan rzeczy opisany przez ψ . Na płaszczyźnie semantycznej koniunkcji odpowiada współprawdziwość dwóch zdań, a alternatywie – niewspółfałszywość.

W inny sposób rozumiane są funktory intuicjonistycznego rachunku zdań. Heyting przedstawił tzw. teorio-dowodową interpretację funktorów, u której podstaw leży idea, że uznanie jakiejś formuły oznacza skonstruowanie dla niej dowodu. Charakterystyka funktorów jest zatem następująca:

- a) formułę „ $\phi \wedge \psi$ ” można uznać wtedy i tylko wtedy, gdy (w skrócie: wtw) posiadamy dowód zarówno formuły ϕ , jak i ψ
- b) formułę „ $\phi \vee \psi$ ” można uznać wtw posiadamy dowód przynajmniej jednej z formuł ϕ , ψ
- c) formułę „ $\phi \rightarrow \psi$ ” można uznać wtw dysponujemy konstrukcją, która dołączona do każdej konstrukcji dowodzącej ϕ daje automatycznie konstrukcję dowodzącą ψ
- d) formułę „ $\neg\phi$ ” można uznać wtw dysponujemy konstrukcją, która wyprowadza sprzeczność z założenia, że konstrukcja ϕ została wykonana³².

Zamiast o konstrukcji (dowodzie) można mówić o efektywnej procedurze wykazania. W ten sposób Lemmon uogólnił interpretację Heytinga. Intuicjonistyczną alternatywę interpretował następująco: można wykazać, że jest tak, że ϕ , lub można wykazać, że jest tak, że ψ . Alternatywa jest funktorem, który – obok negacji – wykazuje największe rozbieżności interpretacyjne w stosunku do jego klasycznego odpowiednika.

Przy założeniu dowodowej interpretacji alternatywy nie wolno uznać zdania „każda liczba parzysta większa niż 2 posiada własność Goldbacha³³ lub nie jest tak, że każda liczba parzysta większa niż 2 posiada własność Goldbacha”, ponieważ – jak dotąd – ani nie udowodniono, że każda liczba parzysta większa niż 2 posiada własność Goldbacha, ani nie udowodniono, że istnieje liczba parzysta

³² Heyting 1966: 98–99.

³³ Liczba posiada własność Goldbacha wtedy i tylko wtedy, gdy może być przynajmniej w jeden sposób przedstawiona jako suma dwóch liczb pierwszych.

większa niż 2, która nie posiada własności Goldbacha. Nie ma zatem możliwości przekonania się o prawdziwości (intuicjonistycznie rozumianej) żadnego ze zdań składowych w tym zdaniu występujących.

Funktory intuicjonistycznej negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji są tylko odpowiednikami funktorów klasycznych. Zdaniem Łukasiewicza te pierwsze są silniejsze w tym sensie, że zawsze, jeśli prawdziwe jest zdanie alternatywne, w którym funktor alternatywy jest rozumiany intuicjonistycznie, to prawdziwe jest również odpowiednie zdanie alternatywne, w którym występuje alternatywa klasyczna, lecz nie odwrotnie³⁴. Silniejsze rozumienie alternatywy jest dla Łukasiewicza powodem, dla którego w rachunku intuicjonistycznym odrzuca się prawo wyłączonego środka. Inni uważają, że to właśnie odmienności znaczeniowe funktora negacji, a nie alternatywy, ponoszą winę za odrzucenie prawa wyłączonego środka³⁵. Wydaje się jednak, że takie podejście jest nietrafne, gdyż „kiedy raz zakłóci się wzajemne związki operatorów logicznych, można powiedzieć, że zmieniło się wszystko [...] nazwy i symbole negacji i alternatywy przenoszą się na logikę nieklasyczną, taką jak intuicjonizm, tylko przez luźną i arbitralną analogię”³⁶.

Jeśli intuicjoniści przyjmują odmienną interpretację stałych logicznych, to tym samym inaczej rozumieją prawa logiczne. Klasyczne i intuicjonistyczne prawa wyłączonego środka są tylko do pewnego stopnia analogiczne. Nie można więc twierdzić, że w logice intuicjonistycznej odrzuca się (klasyczne) prawo wyłączonego środka czy podwójnej negacji. Faktycznie intuicjoniści nie uznają niektórych odpowiedników praw logiki klasycznej.

X. Ograniczone pole stosowania

Logiki intuicjonistycznej nie traktowano jako obowiązującej zawsze i wszędzie. Nie pretendowała do roli uniwersalnego narzędzia pozwalającego opisywać zależności między dowolnymi stanami rzeczy, jak to czyniła logika klasyczna. Od początku przypisywano jej ograniczone pole stosowania. Logika intuicjonistyczna została skonstruowana wyłącznie na użytek matematyki intuicjonistycznej. Heyting pisał wprost, że „pytanie, czy znajduje ona zastosowania poza matematyką, w ogóle nas nie obchodzi”³⁷. Zmienne zdaniowe reprezentują zdania o wykonanych (przynajmniej w umyśle matematyka) konstrukcjach matematycznych.

Pojawiły się także próby rozszerzenia logiki intuicjonistycznej poza kontekst matematyki i nadania jej powszechnego charakteru. Przedstawiciele tzw. antyrealizmu semantycznego (M. Dummett, C. Wright) utrzymują, że prawda

³⁴ Łukasiewicz 1961: 267.

³⁵ *Antyrealistyczne spojrzenie na język, myśl, logikę i historię filozofii analitycznej* 1998: 170.

³⁶ Quine 1977: 129.

³⁷ Heyting 1966: 97.

przekraczająca możliwość jej stwierdzenia jest pojęciem pustym. Wobec tego nie można uznać zdania „Jan był odważny lub Jan nie był odważny”, będącego podstawieniem prawa $p \vee \neg p$, w sytuacji, gdy Jan nigdy nie znajdował się w niebezpieczeństwie i nie mógł zademonstrować swojej odwagi lub jej braku, a obecnie już nie żyje³⁸.

Ostatecznie propozycja rozszerzenia logiki intuicjonistycznej poza matematykę nie spotkała się z powszechną aprobatą ani logików, ani przedstawicieli innych dyscyplin, którzy nadal rozumują zgodnie z zasadami logiki klasycznej. Uważa się obecnie, że zasadniczą dziedziną zastosowań logiki intuicjonistycznej, pojmowanej jako środek dowodowy, jest matematyka: teoria mnogości, analiza matematyczna. Intuicjonizm wywiera także wpływ na badania metamatematyczne oraz badania nad podstawami matematyki, gdzie zalicza się go do kierunku konstruktywistycznego.

XI. Epistemologiczno-metodologiczna perspektywa badawcza

Klasyczny rachunek logiczny związany jest z ontologicznym nastawieniem badawczym³⁹, czyli takim, w którym szuka się odpowiedzi na pytanie, jaki jest świat. Intuicjonistów natomiast taka postawa w ogóle nie interesuje. Nie przyjmują, że świat jest jakiś, jeśli nie ma możliwości przekonania się o tym. Przy podejściu związanym z logiką intuicjonistyczną istotną rolę odgrywają metody i możliwości ludzkiego poznania.

Logik klasyczny przyjmuje, że świat jest taki, iż z dwóch sprzecznych stanów rzeczy jeden zachodzi (istnieje), czyli świat jest taki, że niewspólnie zachodzą w nim dwa sprzeczne stany rzeczy. Innymi słowy, świat jest taki, że p , lub nie jest taki, że p , czyli świat jest taki, że: $p \vee \neg p$. Przy podejściu intuicjonistycznym natomiast nie zawsze jest tak, że można udowodnić, że p , lub można udowodnić, że nie jest tak, że p . Mówiąc bardziej ogólnie: nie zawsze jest tak, że istnieje efektywna procedura wykazania, że p , lub istnieje efektywna procedura wykazania, że nie p . A więc nie obowiązuje $p \vee \neg p$. Te same wzory są zatem przy obu podejściach całkowicie różnie rozumiane.

W perspektywie badawczej, jaką zakłada logika intuicjonistyczna, ogranicza się zasięg dopuszczalnych pytań do możliwości odpowiedzi na nie. Z każdym zaś zdaniem wiąże się nierozdzielnie refleksję nad sposobem dojścia do uznania tego zdania. Perspektywę badawczą tej logiki można określić jako epistemologiczno-metodologiczną.

³⁸ Dummett 1987b: 7–10. Krytykę argumentacji Dummetta przeprowadza Grobler 1990: 47–61.

³⁹ Przy takim nastawieniu daje się uzasadnić jego obowiązywalność.

Zamiast zakończenia: kłopoty na osi relacji: logika klasyczna–logika intuicjonistyczna

Celem Heytinga było zbudowanie takiego systemu, w którym nie będą obowiązywały formuły umożliwiające niekonstrukttywne dowody twierdzeń matematycznych. Z podanej przezeń aksjomatyki nie można było wywieść niepożądanych (odpowiedników) praw logiki klasycznej. W parze z tą słabszą aksjomatyką szły mocniejsze środki dowodowe. W zamierzeniu autora logika intuicjonistyczna była zatem częścią właściwą logiki klasycznej. Pretendowała do zastąpienia tej ostatniej na terenie matematyki.

Okazało się później, że można paradoksalnie udowodnić twierdzenie o zanużalności zbioru tautologii klasycznych w zbiorze tautologii intuicjonistycznych. To twierdzenie Gödla jest słuszne jedynie pod warunkiem, że do aksjomatów Heytinga doda się definicje funktorów alternatywy i implikacji w terminach negacji i koniunkcji. W tak wzbogaconej logice intuicjonistycznej można otrzymać wszystkie tezy klasycznego rachunku zdań.

Problemy z określeniem faktycznej relacji pomiędzy logiką intuicjonistyczną i klasyczną miał również Łukasiewicz. Początkowo (1938) przyjmował, że pierwsza zawiera się w sposób właściwy w drugiej, a następnie (1952) uznał, że zachodzi zupełnie odwrotna zależność. Twierdzenie głoszące, że intuicjonistyczny rachunek zdań jest nadsystemem dla klasycznego rachunku zdań, Łukasiewicz udowodnił, dodając do tego pierwszego definicję zawierającą zmienną funktorową, za którą podstawiał – niezgodnie z zamiarem Leśniewskiego, od którego ją przejął – nieprawdziwościowe funktory intuicjonistyczne⁴⁰.

Kolejnym faktem sugerującym, że logika intuicjonistyczna jest raczej rozszerzeniem niż zawężeniem logiki klasycznej, jest jej interpretacja w logice modalnej S4. J.C.C. McKinsey i A. Tarski wykazali, że jeśli w jakiejś tezie rachunku Heytinga zastąpi się każdą zmienną p przez Lp (jest konieczne, że p), negację zmiennej $\neg p$ przez $\neg Mp$ (jest niemożliwe, że p), implikację materialną przez implikację ścisłą, to otrzyma się odpowiednie twierdzenie systemu S4⁴¹. To nieoczekiwane powinowactwo z logiką modalną oraz traktowanie rachunku intuicjonistycznego jako rozszerzenia klasycznego nie było w żaden sposób zamierzone przez twórców intuicjonizmu. Ponadto jest ono możliwe tylko pod warunkiem posłużenia się definicjami, które nie spełniają postulatu nietwórczości.

Zarówno Brouwer i Heyting, jak i współcześni ortodoksyjni intuicjoniści uważają się za krytyków logiki klasycznej. Nie jest jednak tak, że krytyka dotyczy tylko obowiązywalności pewnych praw. To, czy dana formuła jest tezą systemu, wydaje się sprawą drugorzędną, będącą konsekwencją bardziej podstawowego poglądu na naturę i zadania logiki. Logika intuicjonistyczna wyrosła w całkowicie odmiennym od klasycznego paradygmacie uprawiania nauki. Zakłada nieonto-

⁴⁰ Szerzej na ten temat w: Czernecka-Rej 2000: 223–238.

⁴¹ McKinsey, Tarski 1948: 13–14.

logiczne nastawienie badawcze, nieklasyczną koncepcję prawdy, nieprawdziwościowy charakter stałych logicznych. Konsekwentnie również prawa tej logiki nie mogą być rozumiane na sposób klasyczny.

Jeśli te same formalne napisy są inaczej rozumiane w obu logikach, to wydaje się niecelowe porównywanie tych logik pod kątem obowiązywania lub nie określonych wzorów. Innymi słowy, kategorie takie jak zawężanie czy rozszerzanie logiki nie mają tu zastosowania. Chcąc opisać zakresowo relację między odnośnymi logikami, właściwiej byłoby użyć terminu 'wykluczanie się'.

Na koniec należałoby postawić kluczowe pytanie o konkurencyjność obu logik. Czy słuszne jest postrzeganie logiki intuicjonistycznej jako rywalki logiki klasycznej? Czy pretenduje ona do zastąpienia logiki klasycznej, szczególnie na terenie matematyki? W świetle powyższych ustaleń należy na te pytania odpowiedzieć przecząco. Logiki te nie są konkurencyjne, ponieważ czego innego dotyczą.

Logika intuicjonistyczna jest interesująca zarówno z formalnego, jak i filozoficznego punktu widzenia. Należałoby bliżej zbadać, czego ona dotyczy, o czym mówią jej prawa, z jaką postawą filozoficzną jest związana.

Bibliografia

- Antyrealistyczne spojrzenie na język, myśl, logikę i historię filozofii analitycznej.* Z Michaelem Dummettem rozmawia Fabrice Pataut. 1998. Tłum. A. Grobler, „Kwartalnik Filozoficzny” 26, z. 1: 161–195.
- Borkowski L. 1990a. „Kilka uwag o zasadzie dwuwartościowości i logikach wielowartościowych”, w: tenże, *Studia logiczne*, Lublin, 469–475.
- Borkowski L. 1990b. „O pewnym systemie logicznym opartym na regułach i jego zastosowaniu przy nauczaniu logiki matematycznej”, w: tenże, *Studia logiczne*, Lublin, 174–183.
- Brouwer L.E.J. 1949. „Consciousness, Philosophy and Mathematics”, w: E.W. Beth, H.J. Pos, J.H.A. Hollak (red.), *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy 1948*, Amsterdam, 1235–1249.
- Brouwer L.E.J. 1975a. „Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism”, w: tenże, *Collected Works*, T. 1. *Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting (red.), Amsterdam-Oxford-New York, 508–515.
- Brouwer L.E.J. 1975b. „On the Foundations of Mathematics”, w: tenże, *Collected Works*, T. 1, *Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting (red.), Amsterdam-Oxford-New York, 11–97.
- Czernecka-Rej B. 2000. „Jana Łukasiewicza ujęcie intuicjonistycznego rachunku zdań”, „Roczniki Filozoficzne” 48, z. 1: 223–238.
- Dummett M. 1998. *Logiczna podstawa metafizyki*, tłum. W. Sady, Warszawa.
- Dummett M. 1978a. „Realism”, w: tenże, *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, 145–165.

- Dummett M. 1978b. „Truth”, w: tenże, *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, 1–24.
- Gödel K. 1986. „Zum intuitionistischen Aussagenkalkül”, w: tenże, *Collected Works*, t. 1, *Publications 1929–1936*, Oxford, 222–225.
- Grobler A. 1990. „Antyrealizm Dummetta z perspektywy problemów rozwoju wiedzy”, „*Studia Filozoficzne*” 2–3: 47–61.
- Grzegorzczak A. 1967. „Nieklasyczne rachunki zdań a metodologiczne schematy badania naukowego i definicje pojęć asertywnych”, „*Studia Logica*” 20: 117–130.
- Haack S. 1978. *Philosophy of Logics*, Cambridge.
- Henkin L. 1974. „Matematyczne podstawy matematyki”, „*Wiadomości Matematyczne*” 18: 55–80.
- Heyting A. 1930. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse, Berlin, 42–56.
- Heyting A. 1966. *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam.
- Heyting A. 1934. *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus-Beweistheorie*, Berlin.
- Jaśkowski S. 1936. *Recherches sur le système de la logique intuitioniste*. Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique VI. Philosophie des mathématiques. Actualités scientifiques et industrielles 393, Paris, 58–61.
- Kołmogorow A.N. 1955. *O matematyce*, Warszawa.
- Łukasiewicz J. 1961. „O intuicjonistycznym rachunku zdań”, w: tenże, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, J. Ślupecki (red.), Warszawa, 261–274.
- McKinsey J.C.C. 1939. „Proof of the Independence of the Primitive Symbols of Heyting’s Calculus of Propositions”, „*The Journal of Symbolic Logic*” 4: 155–158.
- McKinsey J.C.C., Tarski A. 1948. „Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting”, „*The Journal of Symbolic Logic*” 13: 1–15.
- Placek T. 1999. *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity*, Dordrecht.
- Porębska M., Suchoń W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*, Warszawa.
- Quine W.V.O. 1977. *Filozofia logiki*, tłum. H. Mortimer, Warszawa.
- Surma S.J. 1971. „Jaśkowski’s Matrix Criterion for the Intuitionistic Propositional Calculus”, „*Prace z Logiki*” 6: 21–54.
- Wajsberg M. 1938. „Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting”, „*Wiadomości Matematyczne*” 46: 45–101.
- Wright C. 1987. „Dummett and Revisionism”, w: B.M. Taylor (red.), *Michael Dummett. Contributions to Philosophy*, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1–30.
- Zawirski Z. 1939/46. „Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej”, „*Kwartalnik Filozoficzny*” 16, z. 2–4: 165–222.

Eleven Reasons Why Intuitionist Logic is Not So Beautiful

Keywords: *intuitionist logic, classical logic, law of logic, logical value, truth, constructivism*

The point of the article is to lay bare the assumptions of intuitionist logic which make it different from standard logic or the traditional logical calculus. The differences are presented at three levels: formal, interpretative and philosophical. They can be summarized as follows. Intuitionist logic has a limited scope of application, it recognizes only constructive forms of demonstration, it accepts a non-classical conception of truth and assumes a demonstrative interpretation of operators, plus its operators are not mutually interdefinable. This logic is combined with epistemic-cum-methodological research perspective. Its characteristic matrix is infinite and truth values are not interpreted as truth and falsity. Intuitionist logic does not admit some rules of classical logic and it cannot accommodate easily the axiomatic method.