

prawa ludów staje się w rzeczywistości kwestia tego, do jakiego stopnia nieliberalne ludy powinny być tolerowane, a nie tego, jak sprawić, by wszystkie ludy na zasadzie dobrowolności partycypowały w prawie ludów.

Rafał Wonicki

Od aprioryzmu do quasi-empiryzmu

Wybór tekstów. Współczesna filozofia matematyki
Wybrał, przełożył, komentarzami opatrzył i wstępem poprzedził Roman Murawski
Redaktor: Marek Drabikowski
Redaktor techniczny: Zofia Malinowska
Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002
s. 386

Antologia tekstów Romana Murawskiego dostarcza przeglądu współczesnych stanowisk w filozofii podstaw matematyki oraz filozofii matematyki. Najstarsze z artykułów zawartych w tej publikacji pochodzą z roku 1930, który stanowi w historii filozofii matematyki swoistą cezurę – we wrześniu tego roku w Królewcu odbyła się II Konferencja Epistemologii Nauk Ścisłych, na której Kurt Gödel ogłosił swoje słynne twierdzenia o niezupełności. Najnowsza z zawartych w książce prac powstała sześćdziesiąt lat później.

Pierwszą część antologii stanowią wykłady, które na wspomnianej konferencji wygłosili Rudolf Carnap, Arend Heyting i Johann von Neumann. Dotyczą one odpowiednio centralnych założeń wiodących podówczas nurtów w rozważaniach nad podstawami matematyki, nurtów określanych dziś mianem klasycznych: logicyzmu, intuicjonizmu i formalizmu. Wszystkie trzy wymienione stanowiska mieszczą się (czy raczej mieściły) jeszcze całkiem w obrębie perspektywy, którą w ostatnim dwudziestolecu XVIII wieku promował Kant: matematyka jest aprioryczna, a jej twierdzenia są prawdziwe bezwyjątkowo i z koniecznością. Głównym zamierzeniem każdego z owych nurtów było dostarczenie remedium na kryzys, który nastąpił w podstawach matematyki na przełomie wieków XIX i XX, kiedy to za bramami matematycznego raj (jak określił Cantorowską teorię mnogości Hilbert) natrafiono na sprzeczności w postaci antynomii.

Początki logicyzmu, który głosi, że matematyka jest fragmentem logiki, wiąże się z nazwiskami Gottloba Fregego i Bertranda Russella, choć jedynie Russel-

lowi można zasadnie przypisać stanowisko logicystyczne, którego intencje rozumie się jako poszukiwanie antidotum na kryzys w podstawach matematyki. Frege stworzył bowiem swój system przed owym kryzysem – co prawda przynajmniej dwie spośród antynomii były już wówczas znane, mianowicie antynomia zbioru wszystkich zbiorów i antynomia wszystkich liczb porządkowych, obie rozpoznane przez samego Cantora, jednakże nie widziano w nich wówczas tak fundamentalnego problemu. U podstaw systemu Fregego leżały też odmienne wytyczne: Frege przystąpił do realizacji Leibnizjańskiej idei *calculus philosophicus*, co obejmowało także dostarczenie arytmetyce podstaw, to ostatnie częściowo inspirowane innym ważnym rezultatem matematycznym: arytmetyzacją analizy matematycznej dokonaną przez Weierstrassa, Cauchy’ego i Dedekinda. Sama zaś realizacja postulatów logicyzmu miała polegać na redukcji pojęć matematycznych do pojęć logicznych oraz wyprowadzeniu wszystkich twierdzeń matematycznych z logicznych. Próbą Russella na tym polu były napisane wraz z Whiteheadem trzypięciotomowe *Principia Mathematica*, rekonstruuje matematykę na gruncie logiki oraz teorii typów. Ta ostatnia stanowiła niezbędne narzędzie dla wyeliminowania antynomii.

Koncepcję formalizmu filozofia matematyki zawdzięcza Hilbertowi. Miał on polegać na ugruntowaniu matematyki metodami finitystycznymi (co nazywa się dzisiaj programem Hilberta). Ponieważ operowanie pojęciem nieskończoności rozdzieliło antynomie, Hilbert zaproponował, by matematykę zawierającą to pojęcie sformalizować (to jest, mówiąc ogólnie, sprowadzić do konkretnych znaków oraz reguł operowania nimi), a następnie rezultat owej formalizacji badać już przy użyciu wyłącznie metod finitystycznych, zapewniając w ten sposób matematyce niewzruszone podstawy. Jednym z rezultatów takiej formalizacji miał być dowód niesprzeczności matematyki infinitystycznej.

Intuicjonizm, stanowisko w pierwotnej postaci sformułowane przez holenderskiego matematyka Luitzena Brouwera rezygnował po prostu z kłopotliwych działań matematyki, odrzucając na przykład pojęcie nieskończoności nieprzeliczalnych, a przeliczalne przyjmując jedynie w sensie potencjalnym – jako reguły wytwarzania ciągle nowych elementów. Domagał się ponadto konstrukcji wszelkich obiektów, o których w matematyce może być mowa, twierdząc, że nie istnieje żaden niezależny od podmiotu świat bytów matematycznych.

Rok 1930 ostudził nieco zapal przedstawieli owych trzech nurtów, co stało się za sprawą Kurta Gödla. Na II Konferencji Epistemologii Nauk Ścisłych w Królewcu Gödel przedstawił w zarysie swe dwa twierdzenia o zupełności, które opublikował w roku następnym. Pierwsze mówiło, że w systemach aksjomatycznych zawierających arytmetykę istnieją zawsze zdania niedowodliwe, drugie – że w dowolnym takim systemie niedowodliwe jest zdanie stwierdzające jego niesprzeczność. Kładły one kres nadziejom na realizację programu Hilberta w jego pierwotnej postaci i nakazywały odnosić się z ostrożnością do rezultatów logicystycznych oraz intuicjonistycznych. Ponadto stanowiły pierwszy krok w stronę

zmiany statusu przedmiotu zainteresowań filozofów matematyki: zapowiadały zwrócenie się ku matematycznej praktyce badawczej, podczas gdy stanowiska klasyczne zajmowały się bardziej jej rezultatami.

Włączenie teorii mnogości do matematyki przyczyniło się do zmiany statusu epistemologicznego tej ostatniej, same zaś pojęcia teorii zbiorów stały się w matematyce wszechobecne, wyznaczając w dużej mierze współczesną jej postać. Wątkiem przewodnim tekstów drugiej część antologii Murawskiego jest problematyka teoriomnogościowa, wciąż rozważana z rozmaitych perspektyw fundacjonalistycznych, jednakże w kolejnych tekstach coraz częściej pojawia się jako istotny wątek praktyka badawcza matematyków. Znaleźć można w tej partii dwie prace Kurta Gödla – artykuł zawierający rozważania nad ideami logiki matematycznej, bazujące na dokonaniach Russella: zawiera on argumentację na rzecz platonizmu. Drugi tekst dotyczący hipotezy *continuum* Cantora. Następnie mamy artykuł Paula Cohena. Rezultaty uzyskane przez tego badacza w dziedzinie teorii mnogości uważa się za niezwykle doniosłe (Cohen udowodnił, za pomocą stworzonej przez siebie metody *forcingu*, że tzw. aksjomat wyboru jest niezależny od aksjomatów teorii mnogości w wersji Zermelo-Fraenkla oraz że te ostatnie uzupełnione o ów aksjomat są niezależne od uogólnionej hipotezy *continuum*). Cohen opowiada się w tekście za pewną wersją formalizmu, argumentując przeciwko platonizmowi.

Część ta zawiera również tekst Petra Vopěnki o tzw. alternatywnej teorii mnogości, w której rozróżnia się dwa pojęcia centralne: skończone zbiory oraz klasy. Ponadto znajdziemy tu rozważania nad statusem oraz kryteriami przyjmowania aksjomatów teorii mnogości pióra Penelope Maddy oraz tekst koncentrujący się wokół problematyki tzw. częściowych realizacji programu Hilberta, autorstwa Stephena Simpsona. W tym ostatnim na istotnym miejscu pojawia się tzw. matematyka odwrotna.

W trzeciej części książki odnajdujemy wyrazisty obraz silnej we współczesnej filozofii matematyki tendencji odchodzenia od perspektywy Kantowskiej, w ramach której matematykę uznaje się za dziedzinę aprioryczną. Dwa splecione wątki dochodzą w pracach zawartych w tej części przede wszystkim do głosu: traktowanie praktyki badawczej matematyków jako głównego przedmiotu filozofii matematyki oraz akcent położony na istotne dla matematyki aspekty empiryczne. Hilary Putnam, Imre Lakatos i Morris Kline są autorami tekstów tej części. Pierwszy argumentuje za niezależnością dwóch zazwyczaj łączonych w filozofii matematyki stanowisk: realizmu i platonizmu, by opowiedzieć się za pierwszym. Putnam posługuje się przy tym znanym dla siebie instrumentarium: argumentem z niezbędności (zwanym też argumentem Quine'a-Putnama, który głosi, że realizm w kwestii nauk przyrodniczych pociąga za sobą realizm w matematyce) oraz modalizmem. Wyraża pogląd, że metod quasi-empirycznych używano w matematyce od początku jej istnienia. Lakatos optuje w swym tekście za możliwą falsyfikowal-

nością teorii matematycznych (w sensie Popperowskim), głosząc, że podejścia fundacjonalistyczne (czyli stanowiska klasyczne oraz ich warianty współczesne) odgradzają matematykę od nauk przyrodniczych przepaścią. Przyjęcie stanowiska empirystycznego w odniesieniu do matematyki pozwala na zasypianie tej przepaści.

Kline bierze w swym artykule na celownik aprioryczność matematyki.

Teksty składające się na część czwartą cechuje największa różnorodność. Praca Eugene Wingera, noblisty w dziedzinie fizyki, zawiera refleksje nad fenomenem skuteczności technik matematycznych w fizyce. Tekst Gregory'ego Chaitina ukazuje wielorakie aspekty twierdzenia Gödla o niezupełności z punktu widzenia teorii informacji. Pojawia się tutaj interesujący wniosek, że zjawisko odkryte przez Gödla jest czymś całkiem powszechnym, prócz tego słyszymy kolejny głos za pokrewieństwem matematyki i nauk przyrodniczych.

Nie zabrakło też tekstu dotyczącego problematyki najbardziej współczesnej, mianowicie roli, jaką w matematyce odgrywają nowoczesne metody obliczeniowe, a zwłaszcza wspomagane komputerowo dowody matematyczne. Artykuł Thomasa Tymoczko poświęcony jest słynnemu twierdzeniu o czterech barwach, którego dowód – biorąc pod uwagę obecny stan wiedzy – da się przeprowadzić jedynie z pomocą komputera, oraz filozoficznym implikacjom takiej roli komputerów w matematyce. Wydaje się, że uznanie tego ostatniego twierdzenia za udowodnione pociąga za sobą konieczność przyjęcia stanowiska empirystycznego w kwestii statusu matematyki.

Fragment pracy Charlesa Parsonsa dotyczy strukturalizmu – stanowiska, które głosi, że liczby naturalne nie są określonymi obiektami, a własności przysługują im jedynie na mocy zajmowania określonego miejsca w pewnych wzorcach czy też strukturach. Prefigurację takiego ujęcia znaleźć można m.in. u Russella. Podejście to rzuca pewne światło na tzw. problem wieloredukcji (możliwość podania wielu równoważnych definicji liczb naturalnych). Tekst Raymonda Wildera, który inspirację dla swej filozofii matematyki czerpie z antropologii, pozostawia czytelnika z uczuciem pewnego niedosytu, gdyż przy całej oryginalności ujęcia w minimalnym jedynie stopniu korzysta z całkiem przecież bogatego zestawu metod i narzędzi antropologicznych.

Wybór tekstów z współczesnej filozofii matematyki stanowi kontynuację antologii tekstów klasycznych Romana Murawskiego¹, która w bieżącym roku doczekała się trzeciego już wydania. Trudno zaprzeczyć, że najnowsza antologia Murawskiego, podobnie jak wcześniejsze jego publikacje, jest na polskim rynku wydawniczym zdarzeniem nie do przecenienia. Relatywne ubóstwo polskojęzycznej literatury dotyczącej filozofii i podstaw matematyki, zwłaszcza współczesnej, jest w zestawieniu z innymi dziedzinami łatwo zauważalne. Jednakże wartość tej

¹ Roman Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 1994, wyd. 2, oraz Warszawa 2003, wyd. 3.

pozycji nie ogranicza się bynajmniej do wypełnienia niszy na rynku wydawnictw naukowych. Co do autora antologii, to jego prace nie wymagają u polskiego czytelnika rekomendacji: dość powiedzieć, że bez publikacji Romana Murawskiego wciąż niezbyt bogaty zasób wydawnictw z omawianej dziedziny stałby się nadzwyczaj skromny. Autorzy tekstów zawartych w antologii to postaci należące do ścisłej czołówki współczesnej matematyki i logiki. Należy się cieszyć, że pracę tę otrzymuje czytelnik w tak eleganckiej i przystępnej formie (książkę rozpoczyna treściwe i klarowne wprowadzenie pióra Murawskiego, a wszystkie teksty wzbogacono o instruktywne przypisy). Natomiast jeśli idzie o kwestię doboru tekstów, którą Roman Murawski porusza we wstępie, to można by ją uznać za sporną jedynie wówczas, gdyby na tej pozycji publikacje z dziedziny filozofii matematyki i jej podstaw miały się wyczerpać. Takiej zaś możliwości, rzecz jasna, nie wolno brać pod uwagę.

Tomasz Piwowarczyk

Półprzewodnik po feminizmie

Joanna Bator, *Feminizm, psychoanaliza, postmodernizm. Filozoficzne dylematy feministek „drugiej fali”*, Gdańsk 2001, słowo/obraz terytoria, s. 294.

Problematyce feministycznej poświęca się coraz więcej miejsca, wszelako w Polsce praktycznie nie ma jeszcze książek o feminizmie pisanych przez polskich autorów/autorki. Czytelnik zainteresowany i zaznajomiony z tematem poradzi sobie bez problemu, sięgając po opracowania anglo- czy francuskojęzyczne i będzie miał w czym wybierać, gdyż na przykład renomowane wydawnictwo Routledge na swoich stronach internetowych oferuje przeszło 1377 pozycji z zakresu problematyki płci. Amator, który chciałby zapoznać się z feminizmem od strony polskich publikacji, nie ma łatwego zadania. Co prawda w 1999 roku pojawiła się książka Kazimierza Ślęczki *Feminizm. Ideologie i koncepcje społeczne współczesnego feminizmu*, którą z pewną ostrożnością można uznać za kompendium wprowadzające w historię ruchu feministycznego. Pracochłonne i staranne opracowanie Ślęczki wymaga jednak pewnych zastrzeżeń. Po pierwsze, stopień zainteresowania autora dokonaniaми feminizmu jest wprost proporcjonalny do stopnia popularności feministycznej literatury, w związku z czym skupia się on